

جزوه توپولوژی مقدماتی

از شهود تا اثبات کامل

نسخه تفصیلی با اثبات همه قضایا و ۳۸ شکل آموزشی

مجید کوکبی

۶ مهر ۱۴۰۵

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

۹

اول مفاهیم بنیادین

۱۳	۱	مقدمه و تعریف‌های اولیه
۱۳	۱.۱	هدف یادگیری
۱۳	۲.۱	پیش‌نیاز
۱۳	۳.۱	شهود روزمره
۱۴	۴.۱	تعریف توپولوژی و اصول موضوع
۱۴	۵.۱	اصول موضوع معادل با مجموعه‌های بسته
۱۵	۶.۱	عملگر بستار و قضیه کوراتوفسکی
۱۷	۷.۱	همسایگی، نقاط درونی، چسبیده و مرزی
۱۸	۸.۱	فضای بنیادی بستار و درون
۲۰	۹.۱	مثال‌های متنوع از فضاهای توپولوژیک
۲۲	۱۰.۱	پایه و زیرپایه توپولوژی
۲۳	۱۱.۱	تفکیک‌پذیری و شمارایی
۲۳	۱۲.۱	اصول جداسازی T_2, T_1, T_0
۲۴	۱۳.۱	مثال‌های حل شده
۲۵	۱۴.۱	اشتباهات رایج
۲۵	۱۵.۱	تمرین‌ها
۲۶	۱۶.۱	خلاصه فصل
۲۶	۱۷.۱	ارجاع به منابع

۲ تابع‌های پیوسته و ساختن فضاهای توپولوژیک جدید

۲۷	۱.۲	هدف یادگیری
۲۷	۲.۲	پیش‌نیاز
۲۷	۳.۲	شهود روزمره
۲۸	۴.۲	پیوستگی تابع در یک نقطه
۲۸	۵.۲	معادل‌های پیوستگی
۳۰	۶.۲	نگاشت باز و نگاشت بسته
۳۰	۷.۲	زیرفضاها
۳۱	۸.۲	فضای حاصل جمعی
۳۲	۹.۲	فضای حاصل ضربی
۳۳	۱۰.۲	نشاننده و همسان‌ریختی
۳۴	۱۱.۲	فضای خارج قسمتی
۳۵	۱۲.۲	توپولوژی‌های قوی و ضعیف
۳۵	۱۳.۲	مثال‌های حل شده

۳۶	اشتباهات رایج	۱۴.۲
۳۶	تمرین‌ها	۱۵.۲
۳۷	خلاصه فصل	۱۶.۲
۳۷	ارجاع به منابع	۱۷.۲
۳۹	همبندی و فشردگی	۳
۳۹	هدف یادگیری	۱.۳
۳۹	پیش‌نیاز	۲.۳
۳۹	شهود روزمره	۳.۳
۴۰	همبندی	۴.۳
۴۳	همبندی راهی	۵.۳
۴۴	فشردگی	۶.۳
۴۶	قضیه‌ی هاینه-بورل	۷.۳
۴۷	حاصل ضرب فضاهای فشرده	۸.۳
۴۷	همبندی موضعی	۹.۳
۴۸	مثال‌های حل شده	۱۰.۳
۴۸	اشتباهات رایج	۱۱.۳
۴۹	تمرین‌ها	۱۲.۳
۵۰	خلاصه فصل	۱۳.۳
۵۰	ارجاع به منابع	۱۴.۳
۵۱	اصول جداسازی	۴
۵۱	هدف یادگیری	۱.۴
۵۱	پیش‌نیاز	۲.۴
۵۱	شهود روزمره	۳.۴
۵۲	فضای منظم	۴.۴
۵۳	فضای نرمال	۵.۴
۵۴	لم اورینسن	۶.۴
۵۶	فضای کاملاً نرمال	۷.۴
۵۷	سلسله‌مراتب اصول جداسازی	۸.۴
۵۷	مثال‌های حل شده	۹.۴
۵۸	اشتباهات رایج	۱۰.۴
۵۸	تمرین‌ها	۱۱.۴
۵۹	خلاصه فصل	۱۲.۴
۵۹	ارجاع به منابع	۱۳.۴
۶۱	پالایه‌ها و تورها	۵
۶۱	هدف یادگیری	۱.۵
۶۱	پیش‌نیاز	۲.۵
۶۱	شهود روزمره	۳.۵
۶۲	مجموعه‌های جهت‌دار و تورها	۴.۵
۶۳	پالایه‌ها	۵.۵
۶۵	رابطه‌ی تورها و پالایه‌ها	۶.۵
۶۶	قضیه‌ی زیرپایه‌ی الکساندر	۷.۵
۶۶	قضیه‌ی تیخونف	۸.۵
۶۶	مثال‌های حل شده	۹.۵
۶۷	اشتباهات رایج	۱۰.۵
۶۷	تمرین‌ها	۱۱.۵
۶۸	خلاصه فصل	۱۲.۵

۶۸	۱۳.۵	ارجاع به منابع
۶۹	۶	توپولوژی فضاهای متریک
۶۹	۱.۶	هدف یادگیری
۶۹	۲.۶	پیش‌نیاز
۶۹	۳.۶	شهود روزمره
۷۰	۴.۶	فضاهای متریک و توپولوژی متریک
۷۱	۵.۶	هم‌ارزی مترها
۷۱	۶.۶	فضاهای متریک‌پذیر
۷۳	۷.۶	خم فضا پراکن
۷۳	۸.۶	مثال‌های حل شده
۷۳	۹.۶	اشتباهات رایج
۷۴	۱۰.۶	تمرین‌ها
۷۴	۱۱.۶	خلاصه فصل
۷۵	۱۲.۶	ارجاع به منابع
۷۷	۷	گروه‌های توپولوژیک
۷۷	۱.۷	هدف یادگیری
۷۷	۲.۷	پیش‌نیاز
۷۷	۳.۷	شهود روزمره
۷۸	۴.۷	گروه‌های توپولوژیک: تعریف و مثال‌ها
۷۹	۵.۷	زیرگروه‌ها و گروه‌های خارج‌قسمتی
۷۹	۶.۷	عمل گروه و فضای همگن
۷۹	۷.۷	بیرکف و کاکوتائی
۸۰	۸.۷	گروه‌های ماتریسی
۸۰	۹.۷	مثال‌های حل شده
۸۰	۱۰.۷	اشتباهات رایج
۸۱	۱۱.۷	تمرین‌ها
۸۱	۱۲.۷	خلاصه فصل
۸۱	۱۳.۷	ارجاع به منابع

دوم دفترچه پاسخ تشریحی کامل ۸۳

۸۵	۸	پاسخ‌های تشریحی فصل ۱
۸۵	۱.۸	پاسخ تمرین ۱.۱
۸۵	۲.۸	پاسخ تمرین ۲.۱
۸۵	۳.۸	پاسخ تمرین ۳.۱
۸۵	۴.۸	پاسخ تمرین ۴.۱
۸۵	۵.۸	پاسخ تمرین ۵.۱
۸۶	۶.۸	پاسخ تمرین ۶.۱
۸۶	۷.۸	پاسخ تمرین ۷.۱
۸۶	۸.۸	پاسخ تمرین ۸.۱
۸۶	۹.۸	پاسخ تمرین ۹.۱
۸۶	۱۰.۸	پاسخ تمرین ۱۰.۱
۸۶	۱۱.۸	پاسخ تمرین ۱۱.۱
۸۶	۱۲.۸	پاسخ تمرین ۱۲.۱

۸۷	۹ پاسخ‌های تشریحی فصل ۲
۸۷	۱.۹ پاسخ تمرین ۱.۲
۸۷	۲.۹ پاسخ تمرین ۲.۲
۸۷	۳.۹ پاسخ تمرین ۳.۲
۸۷	۴.۹ پاسخ تمرین ۴.۲
۸۷	۵.۹ پاسخ تمرین ۵.۲
۸۷	۶.۹ پاسخ تمرین ۶.۲
۸۷	۷.۹ پاسخ تمرین ۷.۲
۸۸	۸.۹ پاسخ تمرین ۸.۲
۸۸	۹.۹ پاسخ تمرین ۹.۲
۸۸	۱۰.۹ پاسخ تمرین ۱۰.۲
۸۸	۱۱.۹ پاسخ تمرین ۱۱.۲
۸۸	۱۲.۹ پاسخ تمرین ۱۲.۲
۸۸	۱۳.۹ پاسخ تمرین ۱۳.۲
۸۹	۱۰ پاسخ‌های تشریحی فصل ۳
۸۹	۱.۱۰ پاسخ تمرین ۱.۳
۸۹	۲.۱۰ پاسخ تمرین ۲.۳
۸۹	۳.۱۰ پاسخ تمرین ۳.۳
۸۹	۴.۱۰ پاسخ تمرین ۴.۳
۸۹	۵.۱۰ پاسخ تمرین ۵.۳
۸۹	۶.۱۰ پاسخ تمرین ۶.۳
۸۹	۷.۱۰ پاسخ تمرین ۷.۳
۹۰	۸.۱۰ پاسخ تمرین ۸.۳
۹۰	۹.۱۰ پاسخ تمرین ۹.۳
۹۰	۱۰.۱۰ پاسخ تمرین ۱۰.۳
۹۰	۱۱.۱۰ پاسخ تمرین ۱۱.۳
۹۰	۱۲.۱۰ پاسخ تمرین ۱۲.۳
۹۰	۱۳.۱۰ پاسخ تمرین ۱۳.۳
۹۰	۱۴.۱۰ پاسخ تمرین ۱۴.۳
۹۰	۱۵.۱۰ پاسخ تمرین ۱۵.۳
۹۱	۱۱ پاسخ‌های تشریحی فصل ۴
۹۱	۱.۱۱ پاسخ تمرین ۱.۴
۹۱	۲.۱۱ پاسخ تمرین ۲.۴
۹۱	۳.۱۱ پاسخ تمرین ۳.۴
۹۱	۴.۱۱ پاسخ تمرین ۴.۴
۹۱	۵.۱۱ پاسخ تمرین ۵.۴
۹۱	۶.۱۱ پاسخ تمرین ۶.۴
۹۱	۷.۱۱ پاسخ تمرین ۷.۴
۹۲	۸.۱۱ پاسخ تمرین ۸.۴
۹۲	۹.۱۱ پاسخ تمرین ۹.۴
۹۲	۱۰.۱۱ پاسخ تمرین ۱۰.۴
۹۲	۱۱.۱۱ پاسخ تمرین ۱۱.۴
۹۲	۱۲.۱۱ پاسخ تمرین ۱۲.۴

۹۳	۱۲ پاسخ‌های تشریحی فصل ۵
۹۳	۱.۱۲ پاسخ تمرین ۱.۵
۹۳	۲.۱۲ پاسخ تمرین ۲.۵
۹۳	۳.۱۲ پاسخ تمرین ۳.۵
۹۳	۴.۱۲ پاسخ تمرین ۴.۵
۹۳	۵.۱۲ پاسخ تمرین ۵.۵
۹۳	۶.۱۲ پاسخ تمرین ۶.۵
۹۳	۷.۱۲ پاسخ تمرین ۷.۵
۹۴	۸.۱۲ پاسخ تمرین ۸.۵
۹۴	۹.۱۲ پاسخ تمرین ۹.۵
۹۴	۱۰.۱۲ پاسخ تمرین ۱۰.۵
۹۴	۱۱.۱۲ پاسخ تمرین ۱۱.۵
۹۴	۱۲.۱۲ پاسخ تمرین ۱۲.۵

۹۵	۱۳ پاسخ‌های تشریحی فصل ۶
۹۵	۱.۱۳ پاسخ تمرین ۱.۶
۹۵	۲.۱۳ پاسخ تمرین ۲.۶
۹۵	۳.۱۳ پاسخ تمرین ۳.۶
۹۵	۴.۱۳ پاسخ تمرین ۴.۶
۹۵	۵.۱۳ پاسخ تمرین ۵.۶
۹۵	۶.۱۳ پاسخ تمرین ۶.۶
۹۵	۷.۱۳ پاسخ تمرین ۷.۶
۹۶	۸.۱۳ پاسخ تمرین ۸.۶
۹۶	۹.۱۳ پاسخ تمرین ۹.۶
۹۶	۱۰.۱۳ پاسخ تمرین ۱۰.۶
۹۶	۱۱.۱۳ پاسخ تمرین ۱۱.۶
۹۶	۱۲.۱۳ پاسخ تمرین ۱۲.۶
۹۶	۱۳.۱۳ پاسخ تمرین ۱۳.۶
۹۶	۱۴.۱۳ پاسخ تمرین ۱۴.۶
۹۶	۱۵.۱۳ پاسخ تمرین ۱۵.۶

۹۷	۱۴ پاسخ‌های تشریحی فصل ۷
۹۷	۱.۱۴ پاسخ تمرین ۱.۷
۹۷	۲.۱۴ پاسخ تمرین ۲.۷
۹۷	۳.۱۴ پاسخ تمرین ۳.۷
۹۷	۴.۱۴ پاسخ تمرین ۴.۷
۹۷	۵.۱۴ پاسخ تمرین ۵.۷
۹۷	۶.۱۴ پاسخ تمرین ۶.۷
۹۷	۷.۱۴ پاسخ تمرین ۷.۷
۹۸	۸.۱۴ پاسخ تمرین ۸.۷
۹۸	۹.۱۴ پاسخ تمرین ۹.۷
۹۸	۱۰.۱۴ پاسخ تمرین ۱۰.۷
۹۸	۱۱.۱۴ پاسخ تمرین ۱۱.۷
۹۸	۱۲.۱۴ پاسخ تمرین ۱۲.۷
۹۸	۱۳.۱۴ پاسخ تمرین ۱۳.۷
۹۸	۱۴.۱۴ پاسخ تمرین ۱۴.۷
۹۸	۱۵.۱۴ پاسخ تمرین ۱۵.۷

۱۰۱	ب جدول تکنیک‌های استفاده‌شده
۱۰۳	پ چک‌لیست پوشش سرفصل
۱۰۵	ت آزمون جامع خودسنجی
۱۰۵	ت.۱ چندگزینه‌ای
۱۰۵	ت.۲ تشریحی
۱۰۷	ث منابع

پیش‌گفتار

توپولوژی، مطالعه‌ی «نزدیکی» بدون نیاز به «فاصله» است. در حساب دیفرانسیل، نزدیکی را با فاصله می‌سنجیدیم. اما توپولوژی می‌گوید کافی است بگوییم چه مجموعه‌هایی «باز» حساب می‌شوند تا نزدیکی معنا پیدا کند. این جزوه برای دانشجوی سال اول دانشگاه نوشته شده است. هدف من این است که هر قضیه را با اثبات کامل ارائه دهم، مگر آنکه واقعاً از حوصله‌ی یک درس مقدماتی خارج باشد (که در آن صورت با برچسب «اختیاری» مشخص کرده‌ام). هیچ اثباتی را حذف نکرده‌ام و هیچ گامی را به خواننده واگذار نکرده‌ام — هرچند در مواردی به «تمرین» ارجاع می‌دهم. این نسخه با ۳۸ شکل آموزشی دقیق غنی‌سازی شده است. هر شکل با هدف آموزشی مشخص، در محل مفهوم خود، و با رنگ‌بندی معنادار (آبی: باز، قرمز: بسته، سبز: همبند، نارنجی: فشرده) ارائه شده است.

نکته طنز

اگر روزی دیدی که یک ریاضی‌دان توپولوژیست دارد با یک فنجان قهوه و یک دونات بازی می‌کند، نگران نشو. او فقط دارد یک همسان‌ریختی را تمرین می‌کند!

ساختار جزوه

- هر فصل با هدف یادگیری آغاز می‌شود.
- شهود روزمره به درک مقدماتی کمک می‌کند.
- هر مفهوم با تعریف رسمی دقیق ارائه می‌شود.
- هر قضیه با اثبات کامل و گام‌به‌گام می‌آید.
- در پایان هر فصل، اشتباهات رایج، تمرین‌ها و پاسخ‌ها آمده است.

نمادها

معنا	نماد
توپولوژی	$\mathcal{T}$
مجموعه توانی	$\mathcal{P}(X)$
بستار مجموعه A	$\text{cl}(A)$
درون مجموعه A	$\text{int}(A)$
مرز مجموعه A	∂A
متمم A	$X \setminus A$
حاصل‌جمع	$\sqcup$
حاصل‌ضرب	$\prod$

فضای خارج قسمتی دایره یکه	$X/\sim$ S^1
------------------------------	-------------------

بخش اول

مفاهیم بنیادین

فصل ۱

مقدمه و تعریف‌های اولیه

۱.۱ هدف یادگیری

پس از مطالعه‌ی این فصل، دانشجو باید بتواند:

۱. توپولوژی را با اصول موضوع مجموعه‌های باز تعریف کند، و معادل آن با اصول موضوع مجموعه‌های بسته را اثبات کند.
۲. عملگر بستار کوراتوفسکی را تعریف کند و قضیه کوراتوفسکی را با اثبات کامل ارائه دهد.
۳. مثال‌های متنوع فضاها را توپولوژیک (گسسته، پادگسسته، هم‌متناهی، متریک، ترتیبی) بسازد.
۴. مفاهیم نقطه درونی، چسبیده، مرزی، بستار، و زیرمجموعه چگال را محاسبه کند.
۵. پایه و زیرپایه توپولوژی را بسازد و قضیه شرط پایه بودن را اثبات کند.
۶. فضاها را تفکیک‌پذیر، شمارای نوع اول و دوم، و اصول جداسازی T_0 ، T_1 ، T_2 را تشخیص دهد.

۲.۱ پیش‌نیاز

- نظریه مجموعه‌ها (اجتماع، اشتراک، متمم، ضرب دکارتی، مجموعه توانی).
- آشنایی مقدماتی با $\mathbb{R}$ و بازه‌ها.
- منطق ریاضی مقدماتی (استدلال مستقیم، عکس نقیض، برهان خلف).

۳.۱ شهود روزمره

شهود

توپولوژی می‌خواهد بگوید «نزدیکی» چیست — بدون اینکه فاصله‌ای اندازه بگیرد. تصور کن در یک شهر هستی. بعضی مکان‌ها «باز» هستند: می‌توانی بدون عبور از دیوار، کمی این‌طرف‌تر و آن‌طرف‌تر بروی. بعضی «بسته» هستند: مرزشان جزء خودشان است. توپولوژی می‌گوید کدام مجموعه‌ها «باز» حساب شوند — و این تصمیم را ما می‌گیریم، نه فاصله!

۴.۱ تعریف توپولوژی و اصول موضوع

تعریف ۱.۱ (توپولوژی). فرض کن X مجموعه‌ای ناتهی باشد. خانواده‌ی $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ را یک توپولوژی روی X می‌نامیم هرگاه:

$$(T1) \quad \emptyset \in \mathcal{T} \text{ و } X \in \mathcal{T}.$$

$$(T2) \quad \text{اجتماع دلخواه از اعضای } \mathcal{T} \text{ در } \mathcal{T} \text{ است: اگر } \{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{T}, \text{ آنگاه } \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \mathcal{T}.$$

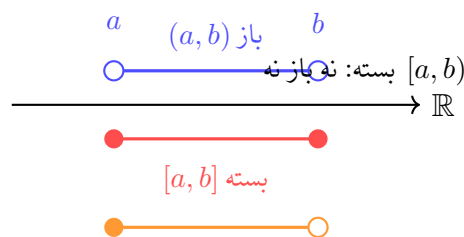
$$(T3) \quad \text{اشتراک متناهی از اعضای } \mathcal{T} \text{ در } \mathcal{T} \text{ است: اگر } U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}, \text{ آنگاه } \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}.$$

در این حالت $(X, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک است. اعضای $\mathcal{T}$ را مجموعه‌های باز و مکمل آن‌ها را مجموعه‌های بسته می‌نامیم.

نکته ۱.۱. توجه کن که در $(T3)$ فقط اشتراک متناهی تضمین شده است. مثال: در $\mathbb{R}$ با توپولوژی معمول، مجموعه‌های $(-1/n, 1/n)$ باز هستند، اما $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-1/n, 1/n) = \{0\}$ باز نیست.

تعریف ۲.۱ (مجموعه بسته). $F \subseteq X$ بسته است اگر $X \setminus F \in \mathcal{T}$.

نکته ۲.۱. هر مجموعه بسته، متمم یک مجموعه باز است، و برعکس. بنابراین «باز» و «بسته» مکمل یکدیگر در توصیف $\mathcal{T}$ هستند.



شکل ۱.۱: بازه باز، بسته، و نیم‌باز در $\mathbb{R}$.

۵.۱ اصول موضوع معادل با مجموعه‌های بسته

قضیه ۱.۱ (اصول موضوع مجموعه‌های بسته). فرض کن X مجموعه‌ای ناتهی و $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ باشد. آنگاه $\mathcal{F}$ خانواده‌ی مجموعه‌های بسته‌ی یک توپولوژی روی X است اگر و تنها اگر:

$$(F1) \quad \emptyset \in \mathcal{F} \text{ و } X \in \mathcal{F}.$$

$$(F2) \quad \text{اشتراک دلخواه از اعضای } \mathcal{F} \text{ در } \mathcal{F} \text{ است.}$$

$$(F3) \quad \text{اجتماع متناهی از اعضای } \mathcal{F} \text{ در } \mathcal{F} \text{ است.}$$

اثبات. جهت $(\Rightarrow)$: فرض کن $\mathcal{F}$ خانواده‌ی مجموعه‌های بسته‌ی یک توپولوژی $\mathcal{T}$ باشد. یعنی $\mathcal{F} = \{X \setminus U : U \in \mathcal{T}\}$.

$$(F1) \quad X \setminus \emptyset = X \in \mathcal{T} \text{ پس } X \in \mathcal{F} \text{ و } X \setminus X = \emptyset \in \mathcal{T} \text{ پس } \emptyset \in \mathcal{F}.$$

$$(F2) \quad \text{فرض کن } \{F_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{F}. \text{ برای هر } \alpha, F_\alpha = X \setminus U_\alpha \text{ که } U_\alpha \in \mathcal{T}. \text{ طبق قوانین دموورگان:}$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus U_\alpha) = X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha.$$

چون $\bigcup_{\alpha} U_\alpha \in \mathcal{T}$ (اصل $T2$)، پس متمم آن یعنی $\bigcap_{\alpha} F_\alpha$ در $\mathcal{F}$ است.

(F۳) فرض کن $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$. برای هر i ، $F_i = X \setminus U_i$ با $U_i \in \mathcal{T}$. طبق دموگران:

$$\bigcup_{i=1}^n F_i = \bigcup_{i=1}^n (X \setminus U_i) = X \setminus \bigcap_{i=1}^n U_i.$$

چون $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$ (اصل)، $\mathcal{T}$ متمم آن در $\mathcal{F}$ است.

جهت ($\Leftarrow$): فرض کن $\mathcal{F}$ سه شرط بالا را داشته باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{T} = \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}.$$

نشان می‌دهیم $\mathcal{T}$ یک توپولوژی است، یعنی، $(T1)$ ، $(T2)$ ، $(T3)$ را برآورده می‌کند.

(T1) $X = X \setminus \emptyset$ با $\emptyset \in \mathcal{F}$ ، پس $X \in \mathcal{T}$ ؛ و $\emptyset = X \setminus X$ با $X \in \mathcal{F}$ ، پس $\emptyset \in \mathcal{T}$.

(T2) فرض کن $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{T}$. برای هر α ، $U_\alpha = X \setminus F_\alpha$ با $F_\alpha \in \mathcal{F}$. طبق دموگران:

$$\bigcup_{\alpha} U_\alpha = \bigcup_{\alpha} (X \setminus F_\alpha) = X \setminus \bigcap_{\alpha} F_\alpha.$$

چون $\bigcap_{\alpha} F_\alpha \in \mathcal{F}$ (شرط)، $\bigcup_{\alpha} U_\alpha \in \mathcal{T}$ یعنی $\mathcal{T}$ متمم آن است.

(T3) فرض کن $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}$. برای هر i ، $U_i = X \setminus F_i$ با $F_i \in \mathcal{F}$. طبق دموگران:

$$\bigcap_{i=1}^n U_i = X \setminus \bigcup_{i=1}^n F_i.$$

چون $\bigcup_{i=1}^n F_i \in \mathcal{F}$ (شرط)، $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$ است.

□

بنابراین $\mathcal{T}$ یک توپولوژی است و $\mathcal{F}$ دقیقاً خانواده بسته‌های آن است.

۶.۱ عملگر بستار و قضیه کوراتوفسکی

تعریف ۳.۱ (عملگر بستار). تابع $\text{cl} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ را عملگر بستار (یا عملگر کوراتوفسکی) می‌نامیم هرگاه برای هر $A, B \subseteq X$:

$$\text{cl}(\emptyset) = \emptyset \quad (K1)$$

$$A \subseteq \text{cl}(A) \quad (\text{گسترش}). \quad (K2)$$

$$\text{cl}(\text{cl}(A)) = \text{cl}(A) \quad (\text{توانی}). \quad (K3)$$

$$\text{cl}(A \cup B) = \text{cl}(A) \cup \text{cl}(B) \quad (\text{جمعی}). \quad (K4)$$

قضیه ۲.۱ (کوراتوفسکی). هر عملگر بستار cl روی X یک توپولوژی $\mathcal{T}$ روی X تعیین می‌کند که در آن، مجموعه‌های بسته دقیقاً مجموعه‌هایی هستند که $\text{cl}(A) = A$. برعکس، هر توپولوژی یک عملگر بستار با ویژگی‌های بالا تولید می‌کند.

اثبات. بخش اول (ساخت توپولوژی): تعریف کن

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq X : \text{cl}(A) = A\}.$$

نشان می‌دهیم $\mathcal{F}$ اصول موضوع بسته‌ها (قضیه ۱.۱) را برآورده می‌کند.

(F۱) طبق (K۱)، $\text{cl}(\emptyset) = \emptyset$ پس $\emptyset \in \mathcal{F}$. برای X : از (K۲) داریم $X \subseteq \text{cl}(X)$ ؛ و چون $\text{cl}(X) \subseteq X$ بدیهی است، $\text{cl}(X) = X$ پس $X \in \mathcal{F}$.

(F۲) فرض کن $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{F}$ یعنی $\text{cl}(F_\alpha) = F_\alpha$ برای هر α . قرار بده $F = \bigcap_\alpha F_\alpha$. باید نشان دهیم $\text{cl}(F) = F$.

جهت $\subseteq$: برای هر α ، $F \subseteq F_\alpha$ پس طبق خاصیت یکنوایی بستار (K۴) نتیجه می‌شود: اگر $A \subseteq B$ ، آنگاه $B = A \cup B$ و $\text{cl}(B) = \text{cl}(A) \cup \text{cl}(B)$ پس $\text{cl}(B) \subseteq \text{cl}(F_\alpha) = F_\alpha$ داریم $\text{cl}(F) \subseteq \text{cl}(F_\alpha) = F_\alpha$ چون این برای هر α برقرار است، $\text{cl}(F) \subseteq \bigcap_\alpha F_\alpha = F$.

جهت $\supseteq$: از (K۲)، $F \subseteq \text{cl}(F)$.

بنابراین $\text{cl}(F) = F$ و $F \in \mathcal{F}$.

(F۳) فرض کن $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$. با استقرا روی n :

– $n = 1$: بدیهی.

– $n = 2$: از (K۴)، $\text{cl}(F_1 \cup F_2) = \text{cl}(F_1) \cup \text{cl}(F_2) = F_1 \cup F_2$ پس $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$.

– گام استقرا: اگر $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$ ، آنگاه $F_1 \cup \dots \cup F_{n-1} \in \mathcal{F}$ (فرض استقرا) و با حالت $n = 2$ ، $(F_1 \cup \dots \cup F_{n-1}) \cup F_n \in \mathcal{F}$.

پس طبق قضیه ۱.۱، $\mathcal{F}$ خانواده‌ی بسته‌های یک توپولوژی $\mathcal{T}$ است. بخش دوم (توپولوژی $\Rightarrow$ عملگر): فرض کن $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک باشد. برای $A \subseteq X$ تعریف کن:

$$\text{cl}(A) = \bigcap \{F \subseteq X : A \subseteq F \text{ و } F \text{ بسته}\}.$$

نشان می‌دهیم چهار خاصیت (K۱)–(K۴) را دارد.

(K۱) $\text{cl}(\emptyset) = \bigcap \{F : F \text{ بسته}\} = \emptyset$ چون $\emptyset$ خودش بسته است و در اشتراک حاضر است.

(K۲) اگر $x \in A$ ، آنگاه x در همه‌ی مجموعه‌های بسته شامل A است، پس $x \in \text{cl}(A)$.

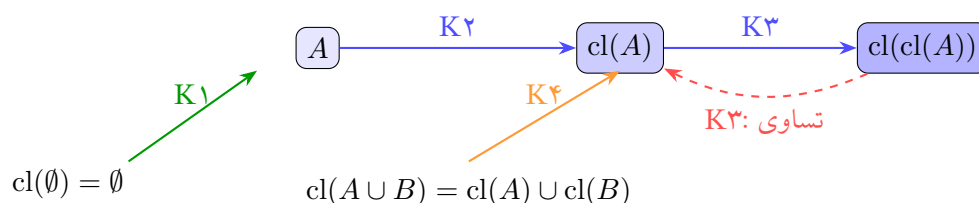
(K۳) طبق تعریف، $\text{cl}(A)$ اشتراک مجموعه‌های بسته است، پس بسته است. بنابراین $\text{cl}(A)$ خودش در مجموعه‌ای که اشتراکش گرفته می‌شود حاضر است. پس $\text{cl}(\text{cl}(A)) \subseteq \text{cl}(A)$ ؛ و از (K۲) جهت دیگر نتیجه می‌شود.

(K۴) جهت $\subseteq$: چون $A \subseteq A \cup B$ ، از یکنوایی $\text{cl}(A) \subseteq \text{cl}(A \cup B)$ ؛ مشابه $\text{cl}(B) \subseteq \text{cl}(A \cup B)$ ؛ پس $\text{cl}(A) \cup \text{cl}(B) \subseteq \text{cl}(A \cup B)$.

جهت $\supseteq$: مجموعه‌ی $\text{cl}(A) \cup \text{cl}(B)$ اجتماع دو مجموعه بسته است، پس بسته است. هم‌چنین $A \subseteq \text{cl}(A)$ و $B \subseteq \text{cl}(B)$ ، پس $A \cup B \subseteq \text{cl}(A) \cup \text{cl}(B)$. چون $\text{cl}(A \cup B)$ کوچک‌ترین مجموعه بسته شامل $A \cup B$ است، $\text{cl}(A \cup B) \subseteq \text{cl}(A) \cup \text{cl}(B)$.

□

پس cl یک عملگر بستار است.



شکل ۲.۱: عملگر بستار کوراتوفسکی و چهار اصل موضوعی K۱–K۴

۷.۱ همسایگی، نقاط درونی، چسبیده و مرزی

تعریف ۴.۱ (همسایگی). $N \subseteq X$ یک همسایگی نقطه‌ای $x \in X$ است هرگاه مجموعه‌ی بازی مانند U موجود باشد که $x \in U \subseteq N$ باشد. توجه: خود N لازم نیست باز باشد.

مثال ۱.۱. در $\mathbb{R}$ با توپولوژی معمول:

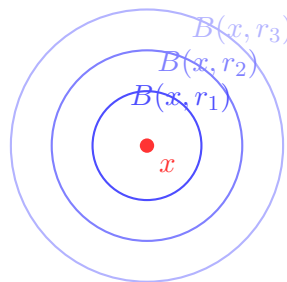
- $[-1, 1]$ همسایگی ۰ است، چون $[-1, 1] \supseteq (-1/2, 1/2)$ و شامل ۰ است.
- $(0, 2)$ همسایگی ۱ است.
- $[0, 1]$ همسایگی ۰ است، چون $[0, 1] \supseteq (-1/2, 1/2)$ ؟ نه! این اشتباه است. $(-1/2, 1/2)$ شامل اعداد منفی است که در $[0, 1]$ نیستند. پس $[0, 1]$ همسایگی ۰ نیست.
- اما $[0, 1]$ همسایگی $1/2$ است، چون $[0, 1] \supseteq (1/4, 3/4)$ و شامل $1/2$ است.

تعریف ۵.۱ (نقطه درونی). $x \in A$ یک نقطه درونی A است هرگاه A خودش همسایگی x باشد. مجموعه‌ی همه‌ی نقاط درونی را با $\text{int}(A)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۶.۱ (نقطه چسبیده). $x \in X$ یک نقطه چسبیده A است هرگاه هر همسایگی x با A اشتراک ناتهی داشته باشد. مجموعه‌ی همه‌ی نقاط چسبیده را با $\text{cl}(A)$ (یا $\bar{A}$) نشان می‌دهیم.

تعریف ۷.۱ (نقطه مرزی). $x \in X$ یک نقطه مرزی A است هرگاه هر همسایگی x هم با A و هم با $X \setminus A$ اشتراک ناتهی داشته باشد. مجموعه‌ی همه‌ی نقاط مرزی را با ∂A نشان می‌دهیم.

تعریف ۸.۱ (زیرمجموعه چگال). $D \subseteq X$ چگال است هرگاه $\text{cl}(D) = X$.



x باز همسایگی $B(x, r)$ هر $r_1 < r_2 < r_3$

شکل ۳.۱: همسایگی‌های تودرتوی نقطه x در فضای متریک.

قضیه ۳.۱. تعریف‌های دوگانه‌ی بستار معادل‌اند:

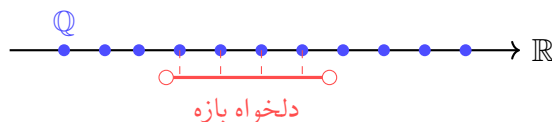
$$\text{cl}(A) = \bigcap \{F \subseteq X : F \text{ بسته}, A \subseteq F\} = \{x \in X : x \text{ هر همسایگی با } A \text{ اشتراک دارد}\}.$$

اثبات. فرض کن $C = \bigcap \{F : F \text{ بسته}, A \subseteq F\}$ و $D = \{x : x \text{ هر همسایگی با } A \text{ اشتراک دارد}\}$. نشان می‌دهیم $C = D$.

$(D \subseteq C)$: فرض کن $x \in D$. می‌خواهیم نشان دهیم x در هر مجموعه‌ی بسته‌ی شامل A قرار دارد. فرض خلف: F بسته، $A \subseteq F$ ، اما $x \notin F$. آنگاه $x \in X \setminus F$ باز و شامل x است. چون $A \subseteq F$ ، داریم $(X \setminus F) \cap A = \emptyset$. این با $x \in D$ در تناقض است. پس $x \in C$.

$(C \subseteq D)$: فرض کن $x \in C$ و N همسایگی x . باید نشان دهیم $N \cap A \neq \emptyset$. فرض خلف: $N \cap A = \emptyset$.

پس $A \subseteq X \setminus N$. چون N همسایگی x است، مجموعه بازی مانند U با $x \in U \subseteq N$ موجود است. پس $X \setminus N \subseteq X \setminus U$ که بسته است (چون U باز است). بنابراین $X \setminus U$ یک مجموعه بسته شامل A است. چون $x \in C$ ، باید $x \in X \setminus U$ ، یعنی $x \notin U$ — که با $x \in U$ در تناقض است. $\square$



گویا شامل باز بازه هر: $\text{cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$

شکل ۴.۱: چگالی $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$: هر بازه باز شامل عدد گویا.

۸.۱ قضایای بنیادی بستار و درون

قضیه ۴.۱. برای هر $A, B \subseteq X$:

۱. $A \subseteq \text{cl}(A)$

۲. اگر $A \subseteq B$ ، آنگاه $\text{cl}(A) \subseteq \text{cl}(B)$ (یکنوایی).

۳. $\text{cl}(A \cup B) = \text{cl}(A) \cup \text{cl}(B)$

۴. $\text{cl}(A \cap B) \subseteq \text{cl}(A) \cap \text{cl}(B)$ (شامل بودن، نه تساوی).

۵. $\text{cl}(\text{cl}(A)) = \text{cl}(A)$

۶. $\text{cl}(\emptyset) = \emptyset$ و $\text{cl}(X) = X$

۷. $\text{cl}(A)$ بسته است.

۸. A بسته است اگر و تنها اگر $\text{cl}(A) = A$

اثبات. ۱. اگر $x \in A$ ، هر همسایگی x شامل x است و لذا با A اشتراک دارد. پس $x \in \text{cl}(A)$.

۲. اگر $x \in \text{cl}(A)$ ، هر همسایگی x با A اشتراک دارد، پس با $B \supseteq A$ نیز اشتراک دارد، پس $x \in \text{cl}(B)$.

۳. چون $A \subseteq A \cup B$ و $B \subseteq A \cup B$ ، از یکنوایی: $\text{cl}(A) \subseteq \text{cl}(A \cup B)$ و $\text{cl}(B) \subseteq \text{cl}(A \cup B)$ ، پس $\text{cl}(A) \cup \text{cl}(B) \subseteq \text{cl}(A \cup B)$.

($\supseteq$) مجموعه‌ی $\text{cl}(A) \cup \text{cl}(B)$ اجتماع دو مجموعه بسته است، پس بسته است. همچنین $A \subseteq \text{cl}(A) \subseteq \text{cl}(A) \cup \text{cl}(B)$ و $B \subseteq \text{cl}(B) \subseteq \text{cl}(A) \cup \text{cl}(B)$ ، پس $A \cup B \subseteq \text{cl}(A) \cup \text{cl}(B)$. چون $\text{cl}(A \cup B)$ کوچک‌ترین مجموعه بسته شامل $A \cup B$ است، $\text{cl}(A \cup B) \subseteq \text{cl}(A) \cup \text{cl}(B)$.

۴. چون $A \cap B \subseteq A$ و $A \cap B \subseteq B$ ، از یکنوایی: $\text{cl}(A \cap B) \subseteq \text{cl}(A)$ و $\text{cl}(A \cap B) \subseteq \text{cl}(B)$ ؛ پس $\text{cl}(A \cap B) \subseteq \text{cl}(A) \cap \text{cl}(B)$.

مثال نقض برای تساوی: در $\mathbb{R}$ ، $A = (0, 1)$ و $B = (1, 2)$ ؛ $\text{cl}(A) \cap \text{cl}(B) = \{1\}$ اما $\text{cl}(A \cap B) = \text{cl}(\emptyset) = \emptyset$.

۵. از (۷) نتیجه می‌شود که $\text{cl}(A)$ بسته است، پس با (۸) $\text{cl}(\text{cl}(A)) = \text{cl}(A)$.

۶. $\text{cl}(\emptyset) = \emptyset$ از (۱) با $A = \emptyset$ داریم $\emptyset \subseteq \text{cl}(\emptyset)$ ؛ و از (۴) — یا این واقعیت که $\emptyset$ بسته است و $\text{cl}(\emptyset)$ اشتراکی شامل $\emptyset$ است — $\text{cl}(\emptyset) = \emptyset$ برای X ؛ از (۱) $X \subseteq \text{cl}(X) \subseteq X$ ؛ پس تساوی.

۷. $\text{cl}(A) = \bigcap \{F : A \subseteq F, F \text{ بسته است}\}$ ، و اشتراک هر خانواده‌ای از مجموعه‌های بسته، بسته است (قضیه ۱.۱).

۸. ($\Leftarrow$) اگر $\text{cl}(A) = A$ ، چون $\text{cl}(A)$ بسته است، A بسته است.

($\Rightarrow$) اگر A بسته باشد، در مجموعه‌ی $\{F : A \subseteq F, F \text{ بسته است}\}$ حاضر است. پس $\text{cl}(A) \subseteq A$ ؛ و از (۱) $A \subseteq \text{cl}(A)$ ؛ پس تساوی.

□

قضیه ۵.۱. برای هر $A \subseteq X$:

$$1. X \setminus \text{cl}(A) = \text{int}(X \setminus A).$$

$$2. X \setminus \text{int}(A) = \text{cl}(X \setminus A).$$

اثبات. ۱. فرض کن $x \in X \setminus \text{cl}(A)$. پس x چسبیده‌ی A نیست، یعنی همسایگی بازی مانند U با $x \in U$ موجود است که $U \cap A = \emptyset$. پس $U \subseteq X \setminus A$ ، بنابراین x نقطه‌ی درونی $X \setminus A$ است، یعنی $x \in \text{int}(X \setminus A)$.

۲. فرض کن $x \in \text{int}(X \setminus A)$. پس همسایگی بازی مانند U با $x \in U \subseteq X \setminus A$ موجود است. لذا $U \cap A = \emptyset$ ، پس $x \notin \text{cl}(A)$ ، یعنی $x \in X \setminus \text{cl}(A)$.

۲. با جایگزینی A با $X \setminus A$ در بند (۱):

$$X \setminus \text{cl}(X \setminus A) = \text{int}(A) \implies X \setminus \text{int}(A) = \text{cl}(X \setminus A).$$

□

قضیه ۶.۱. برای هر $A, B \subseteq X$:

$$1. \text{int}(A) \subseteq A.$$

$$2. \text{int}(A) \subseteq \text{int}(B) \text{ آنگاه } A \subseteq B.$$

$$3. \text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B).$$

$$4. \text{int}(A \cup B) \supseteq \text{int}(A) \cup \text{int}(B) \text{ (شامل بودن)}.$$

$$5. \text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A).$$

$$6. \text{int}(\emptyset) = \emptyset \text{ و } \text{int}(X) = X.$$

$$7. \text{int}(A) \text{ باز است}.$$

$$8. A \text{ باز است اگر و تنها اگر } \text{int}(A) = A.$$

اثبات. با دوگانگی درون-بستار (قضیه ۵.۱) و نتایج قضیه ۴.۱:

$$1. \text{int}(A) \subseteq A: \text{ چون } X \setminus A \subseteq \text{cl}(X \setminus A) \text{، با مکمل‌گیری } X \setminus \text{cl}(X \setminus A) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A.$$

$$2. \text{ اگر } A \subseteq B \text{، آنگاه } X \setminus B \subseteq X \setminus A \text{، پس } \text{cl}(X \setminus B) \subseteq \text{cl}(X \setminus A) \text{، پس مکمل‌ها: } \text{int}(A) = X \setminus \text{cl}(X \setminus A) \subseteq X \setminus \text{cl}(X \setminus B) = \text{int}(B).$$

$$3. \text{int}(A \cap B) = X \setminus \text{cl}(X \setminus (A \cap B)) = X \setminus \text{cl}((X \setminus A) \cup (X \setminus B)) = X \setminus [\text{cl}(X \setminus A) \cup \text{cl}(X \setminus B)] = [X \setminus \text{cl}(X \setminus A)] \cap [X \setminus \text{cl}(X \setminus B)] = \text{int}(A) \cap \text{int}(B).$$

$$4. \text{int}(A \cup B) = X \setminus \text{cl}((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) \supseteq X \setminus [\text{cl}(X \setminus A) \cap \text{cl}(X \setminus B)] \supseteq [X \setminus \text{cl}(X \setminus A)] \cup [X \setminus \text{cl}(X \setminus B)] = \text{int}(A) \cup \text{int}(B).$$

$$5. \text{int}(\text{int}(A)) = X \setminus \text{cl}(X \setminus \text{int}(A)) = X \setminus \text{cl}(\text{cl}(X \setminus A)) = X \setminus \text{cl}(X \setminus A) = \text{int}(A).$$

$$6. \text{int}(\emptyset) = X \setminus \text{cl}(X) = X \setminus X = \emptyset; \text{int}(X) = X \setminus \text{cl}(\emptyset) = X \setminus \emptyset = X.$$

$$7. \text{int}(A) = X \setminus \text{cl}(X \setminus A) \text{، و مکمل یک مجموعه بسته باز است}.$$

$$8. (\iff) \text{ اگر } \text{int}(A) = A \text{، از (۷) باز است}.$$

$$(\implies) \text{ اگر } A \text{ باز باشد، } X \setminus A \text{ بسته است، پس } \text{cl}(X \setminus A) = X \setminus A \text{، پس } \text{int}(A) = X \setminus (X \setminus A) = A.$$

□

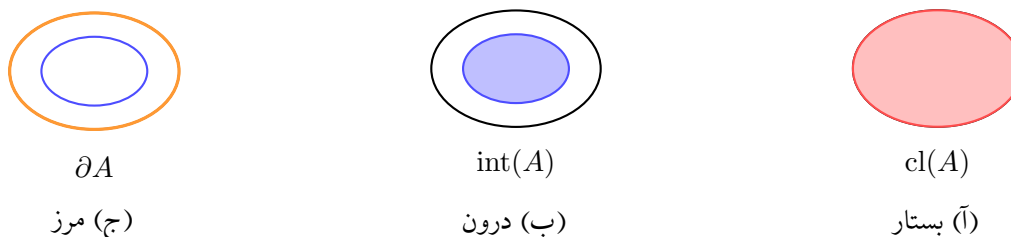
قضیه ۷.۱ (مرن). برای هر $A \subseteq X$:

$$\partial A = \text{cl}(A) \cap \text{cl}(X \setminus A) = \text{cl}(A) \setminus \text{int}(A).$$

اثبات. تساوی اول: $x \in \partial A$ اگر و تنها اگر هر همسایگی x با A و $X \setminus A$ اشتراک داشته باشد، که یعنی $x \in \text{cl}(A)$ و $x \in \text{cl}(X \setminus A)$.
تساوی دوم:

$$\text{cl}(A) \setminus \text{int}(A) = \text{cl}(A) \cap (X \setminus \text{int}(A)) = \text{cl}(A) \cap \text{cl}(X \setminus A) = \partial A. \quad \square$$

□

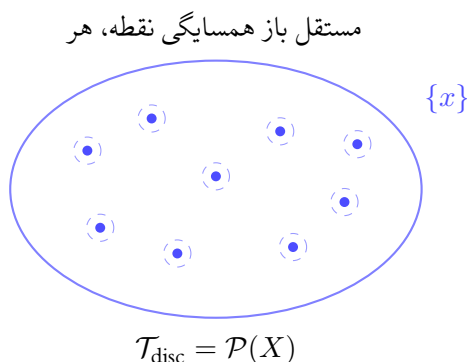


شکل ۵.۱: بستار (قرمز)، درون (آبی)، و مرز (نارنجی) مجموعه A .

۹.۱ مثال‌های متنوع از فضا‌های توپولوژیک

مثال ۲.۱ (توپولوژی گسسته). $\mathcal{T}_{\text{disc}} = \mathcal{P}(X)$. هر زیرمجموعه باز است. این قوی‌ترین توپولوژی روی X است، چون هر توپولوژی دیگری زیرمجموعه‌ی $\mathcal{P}(X)$ است. در این فضا:

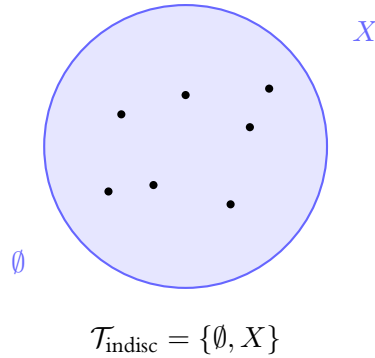
- هر مجموعه هم باز و هم بسته است.
- $\text{cl}(A) = A$ برای هر A .
- $\text{int}(A) = A$ برای هر A .
- $\partial A = \emptyset$ برای هر A .



شکل ۶.۱: توپولوژی گسسته: هر زیرمجموعه باز است؛ نقاط کاملاً جدا.

مثال ۳.۱ (توپولوژی پادگسسته). $\mathcal{T}_{\text{indisc}} = \{\emptyset, X\}$. تنها مجموعه‌های باز، تهی و کل فضا هستند. این ضعیف‌ترین توپولوژی است. در این فضا:

- مجموعه‌های بسته فقط $\emptyset$ و X هستند.
- برای هر $A \subsetneq X$ ناتهی: $\text{cl}(A) = X$ و $\text{int}(A) = \emptyset$.
- $\partial A = X$ برای هر A ناتهی و ناکل.



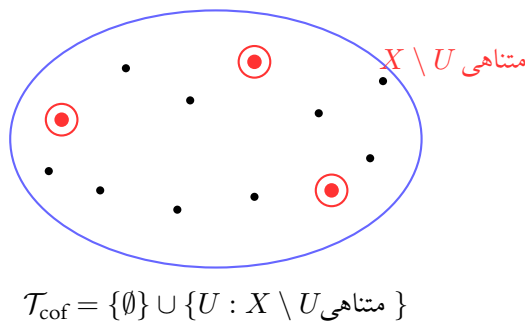
شکل ۷.۱: توپولوژی پادگسسته: تنها بازها $\emptyset$ و X ; همه نقاط به هم چسبیده.

مثال ۴.۱ (توپولوژی متناهی). $X = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}\}$. بررسی اصول:

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ ✓
- اجتماع‌ها: $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \in \mathcal{T}$; $\{a\} \cup \{c, d\} = \{a, c, d\} \in \mathcal{T}$ ✓
- اشتراک‌ها: $\{a, c, d\} \cap \{c, d\} = \{c, d\} \in \mathcal{T}$; $\{a, c, d\} \cap \{a, b\} = \{a\} \in \mathcal{T}$ ✓

مثال ۵.۱ (توپولوژی هم‌متناهی). $\mathcal{T}_{\text{cof}} = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ متناهی}\}$. بررسی:

- $\emptyset$ و X (چون $X \setminus X = \emptyset$ متناهی است) عضو هستند.
- اجتماع $\{U_\alpha\}$: $X \setminus \bigcup U_\alpha = \bigcap (X \setminus U_\alpha) \subseteq X \setminus U_{\alpha_0}$ که متناهی است.
- اشتراک متناهی: $X \setminus \bigcap_{i=1}^n U_i = \bigcup_{i=1}^n (X \setminus U_i)$ متناهی است (اجتماع متناهی مجموعه‌های متناهی).



شکل ۸.۱: توپولوژی هم‌متناهی: بازها متمم متناهی دارند.

مثال ۶.۱ (توپولوژی معمول $\mathbb{R}$). تولید شده توسط پایه‌ی $B = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. هر مجموعه بازی، اجتماع بازه‌های باز است.

مثال ۷.۱ (توپولوژی ترتیبی). X مجموعه‌ای با ترتیب کامل. پایه شامل سه نوع مجموعه است: (a, b) برای $a < b$; $[a_0, b]$ اگر a_0 عنصر مینیمم باشد؛ $(a, b_0]$ اگر b_0 عنصر ماکسیمم باشد.

مثال ۸.۱ (توپولوژی متریک). (X, d) فضای متریک. پایه $B = \{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$ که $B(x, r) = \{y : d(x, y) < r\}$.

۱۰.۱ پایه و زیرپایه توپولوژی

تعریف ۹.۱ (پایه). $B \subseteq \mathcal{T}$ یک پایه برای توپولوژی $\mathcal{T}$ است اگر هر عضو T را بتوان به صورت اجتماع اعضایی از B نوشت.

قضیه ۸.۱ (شرط لازم و کافی برای پایه بودن). فرض کن $B \subseteq \mathcal{P}(X)$. آنگاه B پایه‌ی یک توپولوژی روی X است اگر و تنها اگر:

$$(B1) \quad \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$$

(B2) برای هر $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ و هر $x \in B_1 \cap B_2$ ، عضوی مانند $B_3 \in \mathcal{B}$ موجود باشد که $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.
اثبات. $(\Rightarrow)$: فرض کن B پایه‌ی توپولوژی $\mathcal{T}$ باشد.

(B1) $X \in \mathcal{T}$ ، و از آنجا که B پایه است، $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$ برای برخی $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$. پس $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$.

(B2) فرض کن $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ و $x \in B_1 \cap B_2$. مجموعه $B_1 \cap B_2$ باز است (چون اشتراک دو مجموعه باز است). چون B پایه است، $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{\alpha} B_{\alpha}$ برای برخی $B_{\alpha} \in \mathcal{B}$. چون $x \in B_1 \cap B_2$ ، عضوی مانند $B_3 = B_{\alpha}$ موجود است که $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

$(\Leftarrow)$: فرض کن B شرایط (B1) و (B2) را داشته باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B : \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} \right\}.$$

نشان می‌دهیم $\mathcal{T}$ یک توپولوژی است.

$$(T1) \quad \emptyset = \bigcup_{B \in \emptyset} B \in \mathcal{T} \text{ و } X \in \mathcal{T} \text{ طبق (B1).}$$

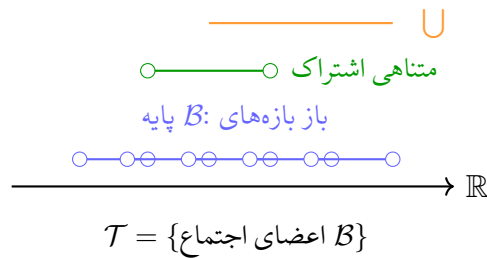
$$(T2) \quad \text{اجتماع دلخواه اعضای } \mathcal{T}: \text{ اگر } U_{\alpha} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_{\alpha}} B \in \mathcal{T}, \text{ آنگاه } \bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = \bigcup_{B \in \bigcup_{\alpha} \mathcal{B}_{\alpha}} B \in \mathcal{T}.$$

(T3) اشتراک متناهی: کافی است برای دو عضو نشان دهیم. فرض کن $U = \bigcup_{\alpha} B_{\alpha}$ و $V = \bigcup_{\beta} B_{\beta}$. برای هر $x \in U \cap V$ ، اندیس‌های α_x, β_x با $x \in B_{\alpha_x} \cap B_{\beta_x}$ موجودند. طبق (B2)، $B_x \in \mathcal{B}$ با $x \in B_x \subseteq B_{\alpha_x} \cap B_{\beta_x}$. پس $U \cap V = \bigcup_{x \in U \cap V} B_x \in \mathcal{T}$ موجود است.

□

تعریف ۱۰.۱ (زیرپایه). $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ یک زیرپایه برای توپولوژی $\mathcal{T}$ است اگر مجموعه‌ی همه‌ی اشتراک‌های متناهی اعضای $\mathcal{S}$ (به همراه X) یک پایه برای $\mathcal{T}$ باشد.

قضیه ۹.۱. هر خانواده $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ با $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X$ ، یک توپولوژی یکتا (ضعیف‌ترین توپولوژی شامل $\mathcal{S}$) تولید می‌کند که $\mathcal{S}$ زیرپایه‌ی آن است.



شکل ۹.۱: پایه (آبی) و ساخت بازها با اجتماع (نارنجی).

اثبات. تعریف کن $B =$ مجموعه‌ی همه‌ی اشتراک‌های متناهی اعضای S ، به علاوه X . نشان می‌دهیم B شرایط (B۱) و (B۲) را دارد.

(B۱): $X \in B$ طبق تعریف، پس $\bigcup_{B \in B} B \supseteq X$.

(B۲): اگر $B_1 = S_1 \cap \dots \cap S_m$ و $B_2 = S'_1 \cap \dots \cap S'_n$ ، آنگاه $B_1 \cap B_2 = S_1 \cap \dots \cap S_m \cap S'_1 \cap \dots \cap S'_n \in B$ (چون اشتراک متناهی از اعضای S است). پس $B_3 = B_1 \cap B_2$ انتخاب می‌کنیم.

بنابراین B پایه‌ی یک توپولوژی T است. این T ضعیف‌ترین توپولوژی شامل S است: هر توپولوژی شامل S باید شامل اشتراک‌های متناهی S و اجتماع‌های آنها باشد، پس شامل T است. $\square$

۱۱.۱ تفکیک پذیری و شمارایی

تعریف ۱۱.۱ (تفکیک‌پذیر). (X, T) تفکیک‌پذیر است اگر زیرمجموعه‌ای چگال و شمارا داشته باشد.

تعریف ۱۲.۱ (شمارای نوع اول). X شمارای نوع اول است اگر هر نقطه‌اش پایه‌ی همسایگی شمارا داشته باشد.

تعریف ۱۳.۱ (شمارای نوع دوم). X شمارای نوع دوم است اگر توپولوژی‌اش پایه‌ی شمارا داشته باشد.

قضیه ۱۰.۱. شمارای نوع دوم $\Rightarrow$ شمارای نوع اول.

اثبات. فرض کن B پایه‌ی شمارا برای T باشد. برای هر $x \in X$ ، تعریف کن $B_x = \{B \in B : x \in B\}$. این مجموعه شمارا است (زیرمجموعه‌ی یک مجموعه شمارا). نشان می‌دهیم B_x پایه‌ی همسایگی x است: اگر N همسایگی x باشد، مجموعه‌ی بازی مانند U با $x \in U \subseteq N$ موجود است. چون B پایه است، $U = \bigcup_{\alpha} B_{\alpha}$ با $B_{\alpha} \in B$ چون $x \in U$ ، عضوی مانند B_{α_0} با $x \in B_{\alpha_0}$ موجود است، پس $B_{\alpha_0} \in B_x$ و $B_{\alpha_0} \subseteq U \subseteq N$. $\square$

قضیه ۱۱.۱. شمارای نوع دوم $\Rightarrow$ تفکیک‌پذیر.

اثبات. فرض کن B پایه‌ی شمارا برای T . از هر $B \in B$ ناتهی، یک نقطه $x_B \in B$ انتخاب کن (با اصل انتخاب). مجموعه‌ی $D = \{x_B : B \in B, B \neq \emptyset\}$ شمارا است (تصویر یک مجموعه شمارا). نشان می‌دهیم $\text{cl}(D) = X$: اگر $U \subseteq X$ باز ناتهی باشد، $U = \bigcup_{\alpha} B_{\alpha}$ با $B_{\alpha} \in B$ ، عضوی $B_{\alpha_0} \neq \emptyset$ موجود است، پس $x_{B_{\alpha_0}} \in B_{\alpha_0} \subseteq U$ ، یعنی $D \cap U \neq \emptyset$. $\square$

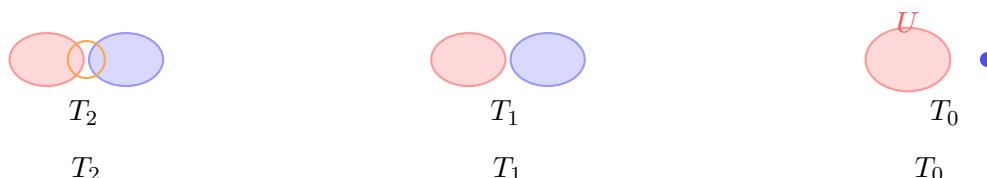
۱۲.۱ اصول جداسازی T_2, T_1, T_0

تعریف ۱۴.۱ (T_2, T_1, T_0) . فرض کن (X, T) فضای توپولوژیک باشد.

• $T_0 X$ (کولموگروف) است اگر برای هر $x \neq y$ ، مجموعه‌ی بازی مانند U موجود باشد که دقیقاً یکی از x, y را شامل شود.

• $T_1 X$ است اگر برای هر $x \neq y$ ، مجموعه‌های بازی U, V با $x \in U, y \in V$ و $U \cap V = \emptyset$ موجود باشند.

• $T_2 X$ (هاسدرف) است اگر برای هر $x \neq y$ ، مجموعه‌های بازی جدا U, V با $x \in U, y \in V$ و $U \cap V = \emptyset$ موجود باشند.



شکل ۱۰.۱: اصول جداسازی: T_0 (تمایز یک‌طرفه)، T_1 (تمایز دوطرفه)، T_2 (هاسدرف: جدا با دیوار).

قضیه ۱۲.۱. $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

اثبات. $T_2 \Rightarrow T_1$: فرض کن U, V باز جدا با $x \in U, y \in V$. چون $U \cap V = \emptyset, y \notin U$ پس برای جداسازی از y کافی است. مشابه V برای y از x .

$T_1 \Rightarrow T_0$: اگر U باز با $x \in U, y \notin U$ باشد، U دقیقاً یکی از x, y را شامل می‌شود. $\square$

قضیه ۱۳.۱. $T_1 X$ است اگر و تنها اگر هر مجموعه تک‌نقطه‌ای $\{x\}$ بسته باشد.

اثبات. $(\Rightarrow)$: فرض کن $T_1 X$ باشد. برای هر $x \in X$ ، نشان می‌دهیم $X \setminus \{x\}$ باز است. برای هر $y \in X \setminus \{x\}$ ، چون $T_1 X$ است، مجموعه‌ی بازی مانند U_y با $U_y \subseteq X \setminus \{x\}$ موجود است. پس $U_y \subseteq X \setminus \{x\}$. بنابراین:

$$X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_y$$

که اجتماع مجموعه‌های باز است، پس باز است.

$(\Leftarrow)$: فرض کن هر $\{x\}$ بسته باشد. برای $x \neq y$ ، $U = X \setminus \{y\}$ باز و شامل x است و $y \notin U$ ؛ و $V = X \setminus \{x\}$ باز و شامل y است و $x \notin V$. پس T_1 است. $\square$

نتیجه ۱.۱. در فضای T_1 ، هر مجموعه متناهی بسته است.

اثبات. هر $\{x_i\}$ بسته است. اجتماع متناهی از بسته‌ها بسته است. پس $\{x_1, \dots, x_n\}$ بسته است. $\square$

قضیه ۱۴.۱. در فضای هاسدرف، حد دنباله‌ها (در صورت وجود) یکتاست.

اثبات. فرض کن $x_n \rightarrow y$ و $x_n \rightarrow x$ با $x_n \neq y$. چون T_2 است، بازهای جدا U, V با $x \in U, y \in V$ موجودند. چون $x_n \rightarrow x$ ، عدد N_1 موجود است که برای $x_n \in U, n \geq N_1$. چون $x_n \rightarrow y$ ، عدد N_2 موجود است که برای $x_n \in V, n \geq N_2$. برای $x_n \in U \cap V, n \geq \max(N_1, N_2)$ ، که با $U \cap V = \emptyset$ در تناقض است. $\square$

۱۳.۱ مثال‌های حل شده

مثال ۹.۱ (محاسبه بستار، درون، مرز در توپولوژی متناهی). $X = \{a, b, c\}$ ، $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$. مجموعه‌های بسته: $\{X, \emptyset, \{b, c\}, \{c\}\}$. $A = \{b, c\}$

• $\text{cl}(A) = \{b, c\} = A$ (چون A خودش بسته است).

• $\text{int}(A) = \emptyset$ (هیچ مجموعه‌ی باز ناتهی داخل A نیست).

• $\partial A = \text{cl}(A) \setminus \text{int}(A) = \{b, c\}$

$B = \{a, c\}$

• $\text{cl}(B) = X$: کوچک‌ترین مجموعه‌ی بسته شامل $B = \{b, c\}$ نیست (چون $a \notin B$)، $\{c\}$ نیست، پس $\text{cl}(B) = X$.

• $\text{int}(B)$: بزرگ‌ترین مجموعه‌ی باز داخل B : $\{a\} \subseteq B$ ، پس $\text{int}(B) = \{a\}$.

$$\bullet \partial B = \text{cl}(B) \setminus \text{int}(B) = X \setminus \{a\} = \{b, c\}$$

مثال ۱۰.۱ (محاسبه در $\mathbb{R}$). $A = [0, 1) \cup \{2\}$ در $\mathbb{R}$ با توپولوژی معمول:

$$\bullet \text{cl}(A) = [0, 1] \cup \{2\}$$

$$\bullet \text{int}(A) = (0, 1)$$

$$\bullet \partial A = \{0, 1, 2\}$$

$$:B = \mathbb{Q}$$

$$\bullet \text{cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R} \text{ (چگالی } \mathbb{Q}\text{)}.$$

$$\bullet \text{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset \text{ (هر بازه‌ی باز شامل عدد گنگ است).}$$

$$\bullet \partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

۱۴.۱ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

«هر مجموعه‌ای یا باز است یا بسته.» اصلاح: $[0, 1)$ در $\mathbb{R}$ نه باز است نه بسته. همچنین $\emptyset$ و X هم باز و هم بسته‌اند.

اشتباه رایج

«اشتراک دلخواه مجموعه‌های باز، باز است.» اصلاح: فقط اشتراک متناهی تضمین شده. $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-1/n, 1/n) = \{0\}$ باز نیست.

اشتباه رایج

«اگر A باز نباشد، حتماً بسته است.» اصلاح: «باز نبودن» و «بسته بودن» دو چیز متفاوت‌اند.

اشتباه رایج

« $\text{cl}(A \cap B) = \text{cl}(A) \cap \text{cl}(B)$ » اصلاح: فقط $\subseteq$ برقرار است. مثال: $A = (0, 1)$, $B = (1, 2)$ در $\mathbb{R}$.

۱۵.۱ تمرین‌ها

تمرین ۱.۱. نشان بده توپولوژی هم‌متناهی روی مجموعه متناهی، همان توپولوژی گسسته است.

تمرین ۲.۱. در $\mathbb{R}$ با توپولوژی معمول، $\text{cl}(\mathbb{Q})$ ، $\text{int}(\mathbb{Q})$ ، $\partial \mathbb{Q}$ را محاسبه کن.

تمرین ۳.۱. نشان بده هر فضای T_2 یک فضای T_1 است.

تمرین ۴.۱. آیا فضای پادگسسته با بیش از یک نقطه T_0 است؟

تمرین ۵.۱. پایه‌ای شمارا برای توپولوژی معمول $\mathbb{R}$ معرفی کن.

تمرین ۶.۱. نشان بده در فضای T_1 ، هر مجموعه متناهی بسته است.

تمرین ۷.۱. آیا $\mathbb{R}$ با توپولوژی هم‌متناهی T_2 است؟

تمرین ۸.۱. نشان بده اگر B پایه‌ی توپولوژی $\mathcal{T}$ باشد، آنگاه $\mathcal{T}$ برابر مجموعه‌ی همه‌ی اجتماع‌های اعضای B است.

تمرین ۹.۱. نشان بده اشتراک دلخواه توپولوژی‌ها روی X ، یک توپولوژی روی X است.

تمرین ۱۰.۱. نشان بده اگر $A \subseteq B$ ، آنگاه $\text{cl}(A) \subseteq \text{cl}(B)$ و $\text{int}(A) \subseteq \text{int}(B)$.

تمرین ۱۱.۱. مثال بزن که در آن $\text{cl}(A \cap B) \neq \text{cl}(A) \cap \text{cl}(B)$.

تمرین ۱۲.۱. نشان بده $\text{int}(A) = A \setminus \partial A$ و $\text{cl}(A) = A \cup \partial A$.

۱۶.۱ خلاصه فصل

- توپولوژی خانواده‌ای از زیرمجموعه‌هاست بسته تحت اجتماع دلخواه و اشتراک متناهی.
- اصول موضوع مجموعه‌های بسته، دوگان اصول مجموعه‌های باز است.
- عملگر بستار کوراتوفسکی چهار ویژگی دارد و با توپولوژی متناظر یک‌به‌یک است.
- درون و بستار با دوگانگی به هم مرتبطند.
- پایه و زیرپایه ابزارهای ساخت توپولوژی هستند.
- تفکیک‌پذیری، شمارایی نوع اول و دوم ویژگی‌های شمارایی‌اند.
- اصول جداسازی T_0, T_1, T_2 سلسله‌مراتبی از جداسازی نقاط فراهم می‌کنند.

۱۷.۱ ارجاع به منابع

مانکرز فصل ۲؛ ویلارد فصل ۲؛ بورباکی فصل ۱؛ هو فصل ۱.

فصل ۲

تابع‌های پیوسته و ساختن فضاهاى توپولوژیک جدید

۱.۲ هدف یادگیری

پس از مطالعه‌ی این فصل، دانشجو باید بتواند:

۱. پیوستگی تابع در یک نقطه و پیوستگی سراسری را تعریف کند.
۲. چهار معادل پیوستگی را با اثبات کامل ارائه دهد.
۳. نگاشت باز و نگاشت بسته را تعریف کند و تفاوت آن‌ها با پیوستگی را تشخیص دهد.
۴. زیرفضا، فضای حاصل جمعی، فضای حاصل ضربی و فضای خارج قسمتی را بسازد.
۵. نشاننده و همسان‌ریختی را تعریف کند و مثال بزند.
۶. توپولوژی‌های قوی و ضعیف را مقایسه کند.

۲.۲ پیش‌نیاز

فصل ۱ (توپولوژی، مجموعه‌های باز و بسته، بستار، درون، پایه، زیرپایه)؛ آشنایی مقدماتی با توابع و ضرب دکارتی.

۳.۲ شهود روزمره

شهود

پیوستگی یعنی «بدون پرش». اگر تابعی پیوسته باشد، تغییرات کوچک در ورودی، تغییرات کوچک در خروجی می‌دهند. در حساب دیفرانسیل، «کوچک» را با ϵ و δ می‌سنجیدیم. در توپولوژی، این کار را با «همسایگی» انجام می‌دهیم — بدون نیاز به فاصله. این یعنی پیوستگی یک مفهوم توپولوژیک است، نه متریک.

نکته طنز

پیوستگی مثل رابطه‌ی دوستانه است: اگر دوست کمی تغییر کند، تو هم کمی تغییر می‌کنی — نه اینکه یک‌دفعه غیب شوی! تابع ناپیوسته مثل دوستی است که یک‌دفعه از همه جا قطع می‌کند.

۴.۲ پیوستگی تابع در یک نقطه

تعریف ۱.۲ (پیوستگی در یک نقطه). فرض کن (X, T_X) و (Y, T_Y) فضاهای توپولوژیک و $f : X \rightarrow Y$ تابع باشد. می‌گوییم f در نقطه‌ی $x_0 \in X$ پیوسته است هرگاه برای هر همسایگی V از $f(x_0)$ در Y ، همسایگی U از x_0 در X موجود باشد که $f(U) \subseteq V$.

تعریف ۲.۲ (تابع پیوسته). $f : X \rightarrow Y$ پیوسته است هرگاه در هر نقطه‌ی $x \in X$ پیوسته باشد.

نکته ۱.۲. توجه کن که پیوستگی در یک نقطه، خاصیت محلی است: فقط به رفتار f در همسایگی x_0 بستگی دارد، نه به کل X .

۵.۲ معادل‌های پیوستگی

قضیه ۱.۲ (معادل‌های پیوستگی). فرض کن $f : X \rightarrow Y$ تابعی بین دو فضای توپولوژیک باشد. گزاره‌های زیر معادل‌اند:

(۱) f پیوسته است (در هر نقطه).

(۲) برای هر مجموعه‌ی باز $V \subseteq Y$ ، مجموعه‌ی $f^{-1}(V)$ در X باز است.

(۳) برای هر مجموعه‌ی بسته $F \subseteq Y$ ، مجموعه‌ی $f^{-1}(F)$ در X بسته است.

(۴) برای هر $A \subseteq X$ ، $f(\text{cl}(A)) \subseteq \text{cl}(f(A))$.

(۵) برای هر $B \subseteq Y$ ، $\text{cl}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(\text{cl}(B))$.

اثبات. $(۱) \Rightarrow (۲)$: فرض کن f پیوسته و $V \subseteq Y$ باز. باید نشان دهیم $f^{-1}(V)$ باز است. کافی است نشان دهیم هر نقطه‌ی $f^{-1}(V)$ نقطه‌ی درونی آن است. فرض کن $x \in f^{-1}(V)$ ، یعنی $f(x) \in V$. چون V باز است، همسایگی $U_x \subseteq f^{-1}(V)$ از x موجود است که $f(U_x) \subseteq V$. پس $U_x \subseteq f^{-1}(V)$. بنابراین:

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x$$

که اجتماع مجموعه‌های باز است، پس باز است.

$(۲) \Rightarrow (۳)$: فرض کن $F \subseteq Y$ بسته باشد. آنگاه $Y \setminus F$ باز است. طبق (۲)، $f^{-1}(Y \setminus F)$ باز است. اما:

$$f^{-1}(Y \setminus F) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(F).$$

پس $X \setminus f^{-1}(F)$ باز است، یعنی $f^{-1}(F)$ بسته است.

(۳) $\Rightarrow$ (۱): فرض کن (۳) برقرار باشد. می‌خواهیم نشان دهیم f در هر $x_0 \in X$ پیوسته است. فرض کن V همسایگی $f(x_0)$ در Y . طبق تعریف همسایگی، مجموعه‌ی بازی مانند $W \subseteq V$ با $f(x_0) \in W$ موجود است. مجموعه‌ی $Y \setminus W$ بسته است. طبق (۳)، $f^{-1}(Y \setminus W)$ بسته است. پس $f^{-1}(W) = f^{-1}(Y \setminus (Y \setminus W)) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus W)$ باز است. چون $x_0 \in f^{-1}(W)$ ، $f(x_0) \in W$ ، بنابراین $U = f^{-1}(W)$ همسایگی بازی از x_0 است و $f(U) \subseteq W \subseteq V$. پس f در x_0 پیوسته است.

(۴) $\Rightarrow$ (۱): فرض کن f پیوسته و $A \subseteq X$. می‌خواهیم نشان دهیم $f(\text{cl}(A)) \subseteq \text{cl}(f(A))$. کافی است نشان دهیم $\text{cl}(A) \subseteq f^{-1}(\text{cl}(f(A)))$ ، چون آنگاه با اعمال f :

$$f(\text{cl}(A)) \subseteq f(f^{-1}(\text{cl}(f(A)))) \subseteq \text{cl}(f(A)).$$

مجموعه‌ی $\text{cl}(f(A))$ بسته است. طبق (۳)، $f^{-1}(\text{cl}(f(A)))$ بسته است. هم‌چنین $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\text{cl}(f(A)))$. پس $\text{cl}(A) \subseteq f^{-1}(\text{cl}(f(A)))$ نیز هست. شامل A است، شامل $\text{cl}(A)$ نیز هست. پس $\text{cl}(A) \subseteq f^{-1}(\text{cl}(f(A)))$.

(۴) $\Rightarrow$ (۵): فرض کن (۴) برقرار باشد. برای $B \subseteq Y$ ، قرار بده $A = f^{-1}(B)$. آنگاه:

$$f(\text{cl}(f^{-1}(B))) \subseteq \text{cl}(f(f^{-1}(B))) \subseteq \text{cl}(B).$$

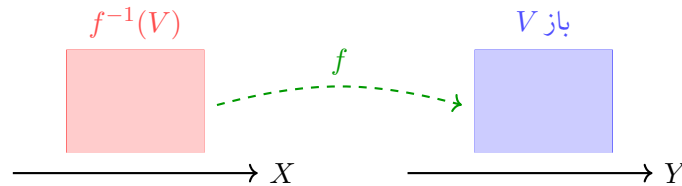
پس $\text{cl}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(\text{cl}(B))$ (با اعمال f^{-1} به دو طرف).

(۵) $\Rightarrow$ (۳): فرض کن $F \subseteq Y$ بسته باشد، یعنی $\text{cl}(F) = F$. طبق (۵):

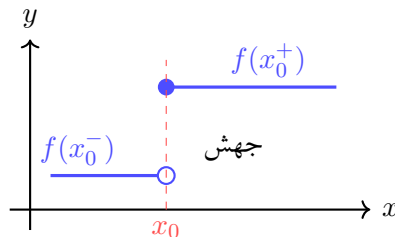
$$\text{cl}(f^{-1}(F)) \subseteq f^{-1}(\text{cl}(F)) = f^{-1}(F).$$

از طرفی $f^{-1}(F) \subseteq \text{cl}(f^{-1}(F))$ همیشه. پس $\text{cl}(f^{-1}(F)) = f^{-1}(F)$ ، یعنی $f^{-1}(F)$ بسته است. پس همه‌ی گزاره‌ها معادل‌اند.

□



شکل ۱.۲: پیوستگی: پیش‌تصویر هر مجموعه باز، باز است.



شکل ۲.۲: تابع ناپیوسته: پرش در x_0 ؛ پیش‌تصویر باز، باز نیست.

نتیجه ۱.۲. ترکیب دو تابع پیوسته، پیوسته است.

اثبات. فرض کن $f : X \rightarrow Y$ و $g : Y \rightarrow Z$ پیوسته باشند. برای هر مجموعه‌ی باز $W \subseteq Z$ ، طبق قضیه ۱.۲، $g^{-1}(W)$ باز در Y است، و سپس $f^{-1}(g^{-1}(W))$ باز در X است. اما:

$$(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)).$$

□

پس $(g \circ f)^{-1}(W)$ باز است و بنابراین $g \circ f$ پیوسته است.

قضیه ۲.۲ (پیوستگی و محدودیت). اگر $f : X \rightarrow Y$ پیوسته و $A \subseteq X$ با توپولوژی زیرفضا باشد، آنگاه: $f|_A : A \rightarrow Y$ پیوسته است.

اثبات. برای هر مجموعه‌ی باز $V \subseteq Y$:

$$(f|_A)^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A.$$

□

چون f پیوسته است، $f^{-1}(V)$ باز در X است. پس $f^{-1}(V) \cap A$ باز در توپولوژی زیرفضا روی A است.

قضیه ۳.۲ (چسباندن). فرض کن $X = A \cup B$ که A, B بسته (یا هر دو باز) در X هستند، و $f : X \rightarrow Y$ تابعی باشد که $f|_A$ و $f|_B$ پیوسته‌اند. آنگاه f پیوسته است.

اثبات. حالت A, B بسته: فرض کن $F \subseteq Y$ بسته باشد. باید نشان دهیم $f^{-1}(F)$ بسته است. داریم:

$$f^{-1}(F) = (f|_A)^{-1}(F) \cup (f|_B)^{-1}(F).$$

چون $f|_A$ پیوسته است، $(f|_A)^{-1}(F)$ بسته در A است، یعنی $(f|_A)^{-1}(F) = A \cap F'$ برای برخی F' بسته در X . چون A بسته است، $(f|_A)^{-1}(F)$ بسته در X است. مشابه برای B . پس اجتماع دو بسته، بسته است.

□

حالت A, B باز: با استفاده از معادل (۲) و مجموعه‌های باز، مشابه.

۶.۲ نگاشت باز و نگاشت بسته

تعریف ۳.۲ (نگاشت باز). $f : X \rightarrow Y$ باز است هرگاه برای هر مجموعه‌ی باز $U \subseteq X$ ، مجموعه‌ی $f(U)$ در Y باز باشد.

تعریف ۴.۲ (نگاشت بسته). $f : X \rightarrow Y$ بسته است هرگاه برای هر مجموعه‌ی بسته $F \subseteq X$ ، مجموعه‌ی $f(F)$ در Y بسته باشد.

نکته ۲.۲. پیوستگی، باز بودن و بسته بودن سه مفهوم مستقل‌اند:

• پیوستگی: پیش‌تصویر باز، باز.

• باز بودن: تصویر باز، باز.

• بسته بودن: تصویر بسته، بسته.

مثال ۱.۲. تابع تصویر $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با $\pi_1(x, y) = x$

• پیوسته است: $\pi_1^{-1}((a, b)) = (a, b) \times \mathbb{R}$ باز است.

• باز است: اگر $U \subseteq \mathbb{R}^2$ باز باشد و $x \in \pi_1(U)$ ، نقطه‌ی $(x, y) \in U$ موجود است. گوی بازی $B((x, y), r) \subseteq U$ موجود است. تصویر این گوی، بازه‌ی $(x - r, x + r) \subseteq \pi_1(U)$ است. پس $\pi_1(U)$ باز است.

• بسته نیست: مجموعه‌ی $F = \{(x, 1/x) : x > 0\}$ در $\mathbb{R}^2$ بسته است، اما $\pi_1(F) = (0, \infty)$ بسته نیست.

قضیه ۴.۲. اگر $f : X \rightarrow Y$ یک همسان‌ریختی باشد، آنگاه f باز و بسته است.

اثبات. فرض کن f همسان‌ریختی و $U \subseteq X$ باز باشد. باید نشان دهیم $f(U)$ باز است. چون f^{-1} پیوسته است، $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ باز است. برای بسته بودن مشابه عمل می‌کنیم. $\square$

قضیه ۵.۲. اگر $f : X \rightarrow Y$ پیوسته و یک‌به‌یک و پوشا باشد، آنگاه f همسان‌ریختی است اگر و تنها اگر f باز باشد.

اثبات. $(\Rightarrow)$: قضیه ۴.۲.

$(\Leftarrow)$: فرض کن f پیوسته، یک‌به‌یک و پوشا باشد. باید نشان دهیم f^{-1} پیوسته است. برای هر باز $U \subseteq X$ ، $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ که طبق فرض باز است. پس f^{-1} پیوسته است. $\square$

۷.۲ زیرفضاها

تعریف ۵.۲ (توپولوژی زیرفضا). فرض کن $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک و $Y \subseteq X$ باشد. توپولوژی زیرفضا روی Y عبارت است از:

$$\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}.$$

$(Y, \mathcal{T}_Y)$ را یک زیرفضا از X می‌نامیم.

قضیه ۶.۲. $\mathcal{T}_Y$ یک توپولوژی روی Y است.

اثبات. بررسی اصول توپولوژی:

(T۱) $Y = X \cap Y$ و $\emptyset = \emptyset \cap Y$ ، پس هر دو در $\mathcal{T}_Y$.

(T۲) فرض کن $\{V_\alpha\} \subseteq \mathcal{T}_Y$. برای هر α ، $V_\alpha = U_\alpha \cap Y$ با $U_\alpha \in \mathcal{T}$. آنگاه:

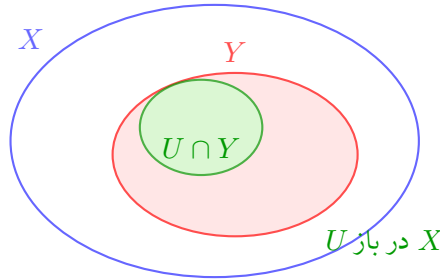
$$\bigcup_{\alpha} V_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} (U_{\alpha} \cap Y) = \left(\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \right) \cap Y.$$

چون $\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \in \mathcal{T}$ ، پس $\bigcup_{\alpha} V_{\alpha} \in \mathcal{T}_Y$.

(T۳) فرض کن $V_i = U_i \cap Y, V_1, \dots, V_n \in \mathcal{T}_Y$. آنگاه:

$$\bigcap_{i=1}^n V_i = \bigcap_{i=1}^n (U_i \cap Y) = \left(\bigcap_{i=1}^n U_i \right) \cap Y \in \mathcal{T}_Y.$$

□



شکل ۳.۲: توپولوژی زیرفضا: $U \cap Y$ که U در X باز است.

قضیه ۷.۲ (بستار در زیرفضا). فرض کن $Y \subseteq X$ با توپولوژی زیرفضا، و $A \subseteq Y$. آنگاه:

$$\text{cl}_Y(A) = \text{cl}_X(A) \cap Y.$$

اثبات. ($\subseteq$): $\text{cl}_X(A)$ بسته در X است، پس $\text{cl}_X(A) \cap Y$ بسته در Y است (طبق تعریف زیرفضا). همچنین $A \subseteq \text{cl}_X(A) \cap Y$ و $A \subseteq \text{cl}_Y(A)$ پس $A \subseteq \text{cl}_X(A) \cap Y$. چون $\text{cl}_Y(A)$ کوچکترین مجموعه‌ی بسته در Y شامل A است، $\text{cl}_Y(A) \subseteq \text{cl}_X(A) \cap Y$.

($\supseteq$): فرض کن $y \in \text{cl}_X(A) \cap Y$ و V همسایگی y در Y . پس $V = U \cap Y$ برای برخی U باز در X شامل y . چون $y \in \text{cl}_X(A)$ ، $U \cap A \neq \emptyset$. چون $A \subseteq Y$ ، $U \cap A = (U \cap Y) \cap A = V \cap A$ ، پس $V \cap A \neq \emptyset$. بنابراین $y \in \text{cl}_Y(A)$. □

نکته ۳.۲. توجه: درون در زیرفضا با درون در فضای بزرگ لزوماً یکسان نیست. مثال: $A = Y = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. $\text{int}_{\mathbb{R}}(A) = (0, 1/2)$ اما $\text{int}_Y(A) = [0, 1/2]$.

۸.۲ فضای حاصل جمعی

تعریف ۶.۲ (حاصل جمعی). فرض کن $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک باشد. حاصل جمعی $\bigsqcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ مجموعه‌ی $\bigcup_{\alpha \in I} (X_\alpha \times \{\alpha\})$ است. توپولوژی روی آن:

$$\mathcal{T}_{\bigsqcup} = \left\{ U \subseteq \bigsqcup_{\alpha} X_\alpha : U \cap (X_\alpha \times \{\alpha\}) \text{ باز در } X_\alpha \text{ برای هر } \alpha \right\}.$$

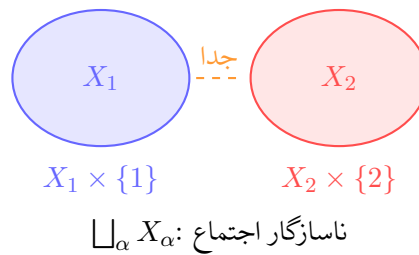
قضیه ۸.۲. $\mathcal{T}_{\bigsqcup}$ یک توپولوژی است. همچنین، هر $X_\alpha \times \{\alpha\}$ هم باز و هم بسته در حاصل جمعی است.

اثبات. بررسی اصول:

(T۱) $\emptyset$ بدیهی؛ کل فضا: X_α باز در X_α ، پس $\bigsqcup X_\alpha$ باز.

(T۲) اگر $\{U_\beta\}$ اعضای توپولوژی، $(\bigcup_{\beta} U_\beta) \cap X_\alpha = \bigcup_{\beta} (U_\beta \cap X_\alpha)$ که اجتماع بازهاست.

(T۳) مشابه با اشتراک متناهی.



شکل ۴.۲: حاصل‌جمعی: کپی‌های جدا از هم با برچسب α .

هر $X_{\alpha} \times \{\alpha\}$: باز است چون X_{α} باز در خودش. بسته است چون متمم $\sqcup_{\beta \neq \alpha} X_{\beta}$ باز است (طبق تعریف توپولوژی). $\square$

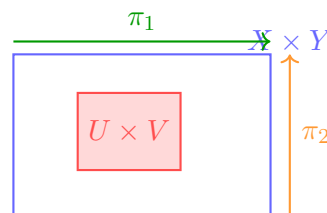
قضیه ۹.۲ (خاصیت جهانی حاصل‌جمعی). اگر $\{f_{\alpha} : X_{\alpha} \rightarrow Z\}$ خانواده‌ای از توابع پیوسته باشد، تابع یکتای پیوسته‌ی $f : \sqcup_{\alpha} X_{\alpha} \rightarrow Z$ موجود است که $f|_{X_{\alpha}} = f_{\alpha}$.

اثبات. تعریف کن $f(x, \alpha) = f_{\alpha}(x)$. یکتایی واضح است. برای پیوستگی: اگر $V \subseteq Z$ باز باشد، $f^{-1}(V) \cap (X_{\alpha} \times \{\alpha\}) = f_{\alpha}^{-1}(V)$ که باز است (چون f_{α} پیوسته). $\square$

۹.۲ فضای حاصل‌ضربی

تعریف ۷.۲ (توپولوژی حاصل‌ضربی). فرض کن $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک باشد. توپولوژی حاصل‌ضربی روی $\prod_{\alpha \in I} X_{\alpha}$ ضعیف‌ترین توپولوژی است که همه‌ی تصویرها $\pi_{\beta} : \prod_{\alpha \in I} X_{\alpha} \rightarrow X_{\beta}$ را پیوسته کند. یک پایه برای آن:

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{\alpha \in I} U_{\alpha} : U_{\alpha} \text{ باز در } X_{\alpha} \text{ و } X_{\alpha} U_{\alpha} = X_{\alpha} \text{ جز متناهی } \alpha \right\}.$$



پایه: $U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y$ با $U \times V$

شکل ۵.۲: حاصل‌ضرب $X \times Y$ و پایه‌ی مستطیلی آن.

قضیه ۱۰.۲ $\mathcal{B}$ یک پایه برای توپولوژی حاصل‌ضربی است.

اثبات. بررسی شرایط پایه بودن (قضیه ۸.۱):

(B۱): $\prod_{\alpha} X_{\alpha} \in \mathcal{B}$ (همه $U_{\alpha} = X_{\alpha}$).

(B۲): فرض کن $B_1 = \prod U_{\alpha}$ و $B_2 = \prod V_{\alpha}$ با شرایط پایه. آنگاه $B_1 \cap B_2 = \prod (U_{\alpha} \cap V_{\alpha})$. چون $U_{\alpha} = X_{\alpha}$ برای همه جز متناهی α و $V_{\alpha} = X_{\alpha}$ برای همه جز متناهی α ، $U_{\alpha} \cap V_{\alpha} = X_{\alpha}$ برای همه جز اجتماع متناهی است. پس $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$. $\square$

قضیه ۱۱.۲ (خاصیت جهانی حاصل‌ضرب). برای هر خانواده‌ی توابع پیوسته $f_{\alpha} : Z \rightarrow X_{\alpha}$ ، تابع یکتای پیوسته‌ی $f : Z \rightarrow \prod_{\alpha} X_{\alpha}$ موجود است که $\pi_{\alpha} \circ f = f_{\alpha}$ برای هر α .

اثبات. یکتایی: اگر f, g هر دو این خاصیت را داشته باشند، $\pi_\alpha(f(z)) = f_\alpha(z) = \pi_\alpha(g(z))$ برای هر α و z . چون تصویرها مختصات را تعیین می‌کنند، $f = g$.
وجود: تعریف کن $f(z) = (f_\alpha(z))_{\alpha \in I}$.
پیوستگی: کافی است پیش‌تصویر اعضای پایه را بررسی کنیم. اگر $B = \prod U_\alpha$ با $U_\alpha = X_\alpha$ برای همه جز متناهی، آنگاه:

$$f^{-1}(B) = \{z : f(z) \in B\} = \{z : f_\alpha(z) \in U_\alpha \text{ برای هر } \alpha\} = \bigcap_{\alpha} f_\alpha^{-1}(U_\alpha).$$

چون $U_\alpha = X_\alpha$ برای همه جز متناهی، $f_\alpha^{-1}(U_\alpha) = Z$ برای همه جز متناهی، پس اشتراک به اشتراک متناهی کاهش می‌یابد:

$$f^{-1}(B) = \bigcap_{i=1}^n f_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}).$$

هر $f_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ باز است (چون f_{α_i} پیوسته و U_{α_i} باز). اشتراک متناهی بازها باز است.
قضیه ۱۲.۲. حاصل ضرب دلخواه فضاها T_2 است.

اثبات. فرض کن $x = (x_\alpha) \neq y = (y_\alpha)$ در $\prod X_\alpha$. پس برای برخی β ، $x_\beta \neq y_\beta$. چون X_β T_2 است، مجموعه‌های باز جدا U_β, V_β با $x_\beta \in U_\beta, y_\beta \in V_\beta$ موجودند. تعریف کن:

$$U = \pi_\beta^{-1}(U_\beta) \quad V = \pi_\beta^{-1}(V_\beta).$$

این‌ها باز هستند. $x \in U, y \in V$ و:

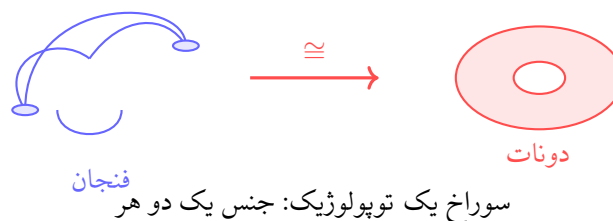
$$U \cap V = \pi_\beta^{-1}(U_\beta \cap V_\beta) = \pi_\beta^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

پس T_2 است. □

۱۰.۲ نشاننده و همسان‌ریختی

تعریف ۸.۲ (نشاننده). $f : X \rightarrow Y$ یک نشاننده (embedding) است هرگاه f پیوسته و یک‌به‌یک باشد و $f : X \rightarrow f(X)$ یک همسان‌ریختی باشد (که $f(X)$ با توپولوژی زیرفضا در نظر گرفته می‌شود).

تعریف ۹.۲ (همسان‌ریختی). $f : X \rightarrow Y$ یک همسان‌ریختی (homeomorphism) است هرگاه f پیوسته، یک‌به‌یک، پوشا و $f^{-1} : Y \rightarrow X$ نیز پیوسته باشد.



شکل ۶.۲: همسان‌ریختی: فنجان و دونات از نظر توپولوژیک یکسان‌اند.

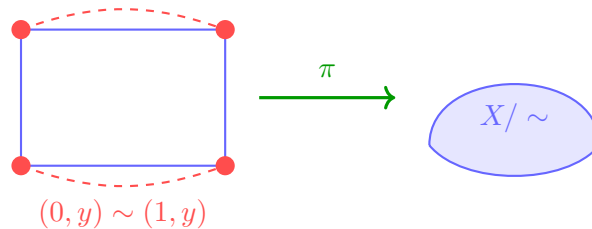
قضیه ۱۳.۲. $f : X \rightarrow Y$ یک نشاننده است اگر و تنها اگر f پیوسته، یک‌به‌یک باشد و برای هر باز $U \subseteq X$ ، مجموعه‌ی $f(U)$ باز در $f(X)$ باشد (با توپولوژی زیرفضا).

اثبات. $(\Rightarrow)$ اگر f نشاننده باشد، $f : X \rightarrow f(X)$ همسان‌ریختی است، پس طبق قضیه ۴.۲، f باز است.
 $(\Leftarrow)$ فرض کن f پیوسته، یک‌به‌یک، و برای هر باز $U \subseteq X$ ، $f(U)$ باز در $f(X)$ باشد. باید نشان دهیم $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$ پیوسته است. برای باز $U \subseteq X$ ، $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ باز در $f(X)$ است. پس f^{-1} پیوسته است. □

۱۱.۲ فضای خارج‌قسمتی

تعریف ۱۰.۲ (توپولوژی خارج‌قسمتی). فرض کن X فضای توپولوژیک و $\sim$ رابطه‌ی هم‌ارزی روی X باشد. توپولوژی خارج‌قسمتی روی $X/\sim$ قوی‌ترین توپولوژی است که تصویر $\pi : X \rightarrow X/\sim$ را پیوسته کند:

$$\mathcal{T}_{X/\sim} = \{U \subseteq X/\sim : \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X\}.$$



هم‌ارز نقاط چسباندن خارج‌قسمت:

شکل ۷.۲: فضای خارج‌قسمتی: چسباندن نقاط هم‌ارز.

قضیه ۱۴.۲. $\mathcal{T}_{X/\sim}$ یک توپولوژی است.

اثبات. (T۱) $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ باز؛ $\pi^{-1}(X/\sim) = X$ باز.

(T۲) اگر $\{U_\alpha\}$ اعضای توپولوژی: $\pi^{-1}(\bigcup U_\alpha) = \bigcup \pi^{-1}(U_\alpha)$ باز.

(T۳) مشابه با اشتراک متناهی.

□

قضیه ۱۵.۲ (خاصیت جهانی خارج‌قسمت). اگر $f : X \rightarrow Z$ پیوسته و ثابت روی کلاس‌های هم‌ارزی باشد، تابع یکتای پیوسته‌ی $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Z$ موجود است که $\bar{f} \circ \pi = f$.

اثبات. خوش‌تعریفی: تعریف کن $\bar{f}([x]) = f(x)$ اگر $[x] = [y]$ ، یعنی $x \sim y$ ، طبق فرض $f(x) = f(y)$ ، پس خوش‌تعریف است.

یکتایی: اگر $\bar{f}, \bar{g}$ هر دو، $\bar{f}([x]) = f(x) = \bar{g}([x])$.
پیوستگی: اگر $V \subseteq Z$ باز باشد، $\bar{f}^{-1}(V) \subseteq X/\sim$ باز است اگر و تنها اگر $\pi^{-1}(\bar{f}^{-1}(V))$ باز در X باشد. اما:

$$\pi^{-1}(\bar{f}^{-1}(V)) = (\bar{f} \circ \pi)^{-1}(V) = f^{-1}(V).$$

□

چون f پیوسته است، $f^{-1}(V)$ باز است. پس $\bar{f}^{-1}(V)$ باز در $X/\sim$ است.

قضیه ۱۶.۲. اگر $f : X \rightarrow Y$ پیوسته، پوشا، و باز (یا بسته) باشد، آنگاه Y با $X/\sim$ همسان‌ریخت است که $\sim$ توسط f تعریف می‌شود ($x \sim y \iff f(x) = f(y)$).

اثبات. تعریف کن $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$ با $\bar{f}([x]) = f(x)$. این تابع خوش‌تعریف، یک‌به‌یک، و پوشا است. طبق قضیه ۱۵.۲، $\bar{f}$ پیوسته است. باید نشان دهیم $\bar{f}^{-1}$ پیوسته است، یعنی $\bar{f}$ باز است.

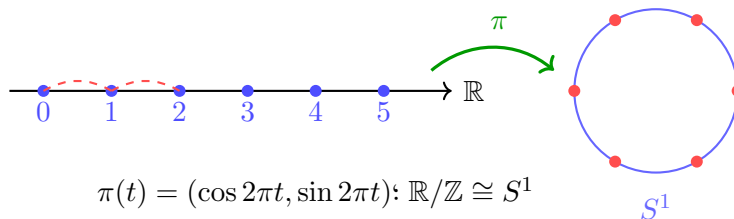
فرض کن $U \subseteq X/\sim$ باز باشد. طبق تعریف توپولوژی خارج‌قسمتی، $\pi^{-1}(U)$ باز در X است. چون f باز است، $f(\pi^{-1}(U))$ باز در Y است. اما:

$$f(\pi^{-1}(U)) = \bar{f}(\pi(\pi^{-1}(U))) = \bar{f}(U).$$

□

پس $\bar{f}(U)$ باز است. بنابراین $\bar{f}$ همسان‌ریختی است.

مثال ۲.۲. $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$: تابع $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ با $\pi(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ پیوسته، پوشا، باز (چون π تصویر یک بازه‌ی باز به طول > 1 را به یک کمان باز می‌برد). طبق قضیه ۱۶.۲، $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$.



$$\pi(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t): \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$$

شکل ۸.۲: خارج قسمت $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ همسان ریخت با دایره S^1 .

۱۲.۲ توپولوژی‌های قوی و ضعیف

تعریف ۱۱.۲ (توپولوژی ضعیف). فرض کن $\{f_\alpha : X \rightarrow Y_\alpha\}_{\alpha \in I}$ خانواده‌ای از توابع باشد که هر Y_α فضای توپولوژیک است. **توپولوژی ضعیف** روی X تولیدشده توسط $\{f_\alpha\}$ ، ضعیف‌ترین توپولوژی روی X است که همه‌ی f_α را پیوسته کند. این توپولوژی زیرپایه‌ی زیر را دارد:

$$\mathcal{S} = \{f_\alpha^{-1}(V) : \alpha \in I, V \text{ باز در } Y_\alpha\}.$$

تعریف ۱۲.۲ (توپولوژی قوی). فرض کن $\{f_\alpha : Y_\alpha \rightarrow X\}_{\alpha \in I}$ خانواده‌ای از توابع باشد. **توپولوژی قوی** روی X تولیدشده توسط $\{f_\alpha\}$ قوی‌ترین توپولوژی روی X است که همه‌ی f_α را پیوسته کند:

$$\mathcal{T}_{\text{قوی}} = \{U \subseteq X : f_\alpha^{-1}(U) \text{ باز در } Y_\alpha \text{ برای هر } \alpha\}.$$

قضیه ۱۷.۲. توپولوژی ضعیف روی X ضعیف‌ترین توپولوژی است که همه‌ی f_α را پیوسته می‌کند.

اثبات. هر توپولوژی $\mathcal{T}$ که f_α را پیوسته کند، باید شامل $f_\alpha^{-1}(V)$ برای هر V باز در Y_α باشد. پس $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$. چون توپولوژی ضعیف ضعیف‌ترین توپولوژی شامل $\mathcal{S}$ است، $\mathcal{T}_{\text{ضعیف}} \subseteq \mathcal{T}$. $\square$

قضیه ۱۸.۲ (خاصیت جهانی توپولوژی ضعیف). فرض کن X با توپولوژی ضعیف تولیدشده توسط $\{f_\alpha : X \rightarrow Y_\alpha\}$ مجهز باشد. تابع $g : Z \rightarrow X$ پیوسته است اگر و تنها اگر $f_\alpha \circ g : Z \rightarrow Y_\alpha$ برای هر α پیوسته باشد.

اثبات. $(\Rightarrow)$: اگر g پیوسته و f_α پیوسته، ترکیب $f_\alpha \circ g$ پیوسته است (نتیجه ۱.۲). $(\Leftarrow)$: فرض کن $f_\alpha \circ g$ برای هر α پیوسته باشد. کافی است پیش‌تصویر اعضای زیرپایه را بررسی کنیم. اگر $S = f_\alpha^{-1}(V)$ باز در Y_α ،

$$g^{-1}(S) = g^{-1}(f_\alpha^{-1}(V)) = (f_\alpha \circ g)^{-1}(V),$$

$\square$

که باز است. پس g پیوسته است.

۱۳.۲ مثال‌های حل شده

مثال ۳.۲ (تحلیل پیوستگی با معادل‌ها). تابع $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با $f(x) = 3x + 1$ بررسی پیوستگی با هر چهار معادل: **معادل (۲)**: برای بازه‌ی باز (a, b) :

$$f^{-1}((a, b)) = \left(\frac{a-1}{3}, \frac{b-1}{3} \right)$$

که باز است. چون هر مجموعه‌ی باز در $\mathbb{R}$ اجتماع بازه‌های باز است، $f^{-1}(V)$ باز است برای هر V باز. **معادل (۳)**: برای $[a, b]$ بسته:

$$f^{-1}([a, b]) = \left[\frac{a-1}{3}, \frac{b-1}{3} \right]$$

که بسته است.

معادل (۴): برای $A \subseteq \mathbb{R}$ ، $f(\text{cl}(A)) \subseteq \text{cl}(f(A))$ ، چون f پیوسته و یکنوا است، $f(\text{cl}(A)) = \text{cl}(f(A))$ (تساوی برقرار است).

معادل (۵): $\text{cl}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(\text{cl}(B))$ چون f^{-1} پیوسته است، برقرار.

مثال ۴.۲ (محاسبه بستار در زیرفضا). $A = (0, 1) \subseteq Y, Y = [0, 1] \subseteq X, X = \mathbb{R}$. پس $\text{cl}_X(A) = [0, 1]$. $\text{cl}_Y(A) = \text{cl}_X(A) \cap Y = [0, 1] \cap [0, 1] = [0, 1]$. $\text{int}_Y(A)$: بزرگ‌ترین مجموعه‌ی باز در Y داخل A . بازهای در Y : $(a, b) \cap [0, 1]$. برای داخل $A = (0, 1)$ بودن، باید $(a, b) \cap [0, 1] \subseteq (0, 1)$. بزرگ‌ترین انتخاب: $(0, 1) \cap [0, 1] = (0, 1)$. پس $\text{int}_Y(A) = (0, 1)$. اما $\text{int}_X(A) = (0, 1)$ نیز. در این مثال یکسان‌اند.

مثال ۵.۲ (حاصل ضرب $\mathbb{R}^2$). $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ با توپولوژی حاصل ضربی. پایه شامل مستطیل‌های باز $(a, b) \times (c, d)$ است. این توپولوژی همان توپولوژی معمول $\mathbb{R}^2$ است (تولیدشده توسط گوی‌های باز اقلیدسی).

مثال ۶.۲ (خارج‌قسمت $[0, 1]/\{0, 1\}$). $X = [0, 1], 0 \sim 1$. خارج‌قسمت $X/\sim$ همسان‌ریخت با S^1 است. تابع $\pi : [0, 1] \rightarrow S^1$ با $\pi(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ پیوسته، پوشا، و بسته است (زیرا $[0, 1]$ فشرده و S^1 هاسدرف است — طبق قضیه‌ای که در فصل بعد می‌آید: تصویر پیوسته‌ی فشرده در هاسدرف، بسته است).

۱۴.۲ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

«هر تابع پیوسته و یک‌به‌یک، همسان‌ریختی است.» **اصلاح:** باید f^{-1} نیز پیوسته باشد. مثال: $f : [0, 2\pi) \rightarrow S^1, f(t) = (\cos t, \sin t)$.

اشتباه رایج

«تصویر پیوسته‌ی یک مجموعه باز، باز است.» **اصلاح:** این خاصیت نگاشت باز است، نه پیوسته. مثال: تابع ثابت.

اشتباه رایج

«درون در زیرفضا با درون در فضای بزرگ یکسان است.» **اصلاح:** مثال: $A = [0, 1/2], Y = [0, 1]$. $\text{int}_Y(A) = [0, 1/2]$ ، اما $\text{int}_{\mathbb{R}}(A) = (0, 1/2)$.

اشتباه رایج

«هر زیرفضای فشرده، بسته است.» **اصلاح:** فقط در فضای هاسدرف. در فضای غیرهاسدرف، ممکن است زیرفضای فشرده بسته نباشد.

۱۵.۲ تمرین‌ها

تمرین ۱.۲. نشان بده تابع ثابت $f : X \rightarrow Y$ با $f(x) = c$ پیوسته است.

تمرین ۲.۲. نشان بده تابع همانی $\text{id} : (X, \mathcal{T}_{\text{disc}}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ برای هر توپولوژی $\mathcal{T}$ پیوسته است.

تمرین ۳.۲. نشان بده اگر $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشند، $f + g$ و $f \cdot g$ پیوسته‌اند.

تمرین ۴.۲. نشان بده تصویر $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته، باز، اما بسته نیست.

تمرین ۵.۲. نشان بده حاصل‌ضرب فضاهاى T_1, T_1 است.

تمرین ۶.۲. نشان بده $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$.

تمرین ۷.۲. نشان بده محدودیت یک تابع پیوسته به یک زیرفضا، پیوسته است.

تمرین ۸.۲. نشان بده اگر $f: X \rightarrow Y$ پیوسته و $A \subseteq X$ ، آنگاه $f(\text{cl}(A)) \subseteq \text{cl}(f(A))$. مثال بزن که شامل بودن اکید باشد.

تمرین ۹.۲. نشان بده توپولوژی خارج قسمتی، توپولوژی قوی تولیدشده توسط π است.

تمرین ۱۰.۲. نشان بده اگر $f: X \rightarrow Y$ همسان ریختی باشد، آنگاه f نشاننده است.

تمرین ۱۱.۲. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با $f(x) = \sin(1/x)$ برای $x \neq 0$ و $f(0) = 0$ را در نظر بگیر. آیا پیوسته است؟

تمرین ۱۲.۲. نشان بده اگر $f: X \rightarrow Y$ پیوسته و X دارای توپولوژی گسسته باشد، آنگاه f پیوسته است (برای هر توپولوژی روی Y).

تمرین ۱۳.۲. نشان بده اگر Y دارای توپولوژی پادگسسته باشد، هر تابع $f: X \rightarrow Y$ پیوسته است.

۱۶.۲ خلاصه فصل

- پیوستگی: پیش تصویر هر باز، باز است. چهار معادل با اثبات کامل ارائه شد.
- ترکیب، محدودیت، و چسباندن توابع پیوسته، پیوسته‌اند.
- نگاشت باز: تصویر باز، باز. نگاشت بسته: تصویر بسته، بسته. این‌ها با پیوستگی متفاوت‌اند.
- زیرفضا: $A \cap U$ با U باز در X . بستار در زیرفضا: $\text{cl}_Y(A) = \text{cl}_X(A) \cap Y$.
- حاصل جمعی: اجتماع مجزای فضاها با توپولوژی طبیعی.
- حاصل ضرب: ضعیف‌ترین توپولوژی که تصویرها را پیوسته کند.
- خارج قسمت: قوی‌ترین توپولوژی که تصویر را پیوسته کند.
- همسان ریختی: پیوسته، یک‌به‌یک، پوشا، با معکوس پیوسته.
- توپولوژی ضعیف: ضعیف‌ترین توپولوژی سازگار با خانواده‌ای از توابع.
- توپولوژی قوی: قوی‌ترین توپولوژی سازگار.

۱۷.۲ ارجاع به منابع

مانکرز فصل ۲ و ۳؛ ویلارد فصل ۳ و ۴؛ بورباکی فصل ۱ و ۲؛ هو فصل ۲.

فصل ۳

همبندی و فشردگی

۱.۳ هدف یادگیری

پس از مطالعه‌ی این فصل، دانشجو باید بتواند:

۱. همبندی را تعریف کند و معادل‌های آن را با مجموعه‌های باز-بسته و توابع پیوسته ارائه دهد.
۲. زیرمجموعه‌های همبند $\mathbb{R}$ را دقیقاً بازه‌ها تشخیص دهد و اثبات کند.
۳. همبندی راهی و مؤلفه‌های همبندی راهی را تعریف کند و رابطه‌ی آن با همبندی را بفهمد.
۴. فشردگی را تعریف کند و قضیه‌ی هاینه-بورل را با اثبات کامل ارائه دهد.
۵. تصویر پیوسته‌ی فشرده را فشرده ببیند، و فشرده در هاسدرف را بسته.
۶. حاصل ضرب متناهی فضاهای فشرده را فشرده اثبات کند (لم لوله).
۷. همبندی موضعی و مؤلفه‌های آن را تحلیل کند.

۲.۳ پیش‌نیاز

فصل‌های ۱ و ۲ (توپولوژی، پیوستگی، زیرفضا، حاصل ضرب)؛ آشنایی با اعداد حقیقی و بازه‌ها.

۳.۳ شهود روزمره

شهود

همبندی یعنی «یک‌تکه بودن». یک فضا همبند است اگر نتوان آن را به دو تکه‌ی باز جدا تقسیم کرد. یک بازه‌ی $\mathbb{R}$ یک‌تکه است؛ اما $(0, 1) \cup (2, 3)$ دو تکه است. فشردگی یک مفهوم ظریف‌تر است. یک فضای فشرده، «محدود و بسته به شکلی است که هر پوشش باز، زیرپوشش متناهی داشته باشد». فشردگی یک خاصیت توپولوژیک است که جایگزین «کراندار بودن» در فضاهای عمومی می‌شود.

نکته طنز

همبندی مثل یک تکه نان است: اگر بتوانی آن را بدون خرد کردن به دو تکه‌ی جدا تقسیم کنی، همبند نبوده! فشردگی مثل یک چمدان خوب بسته‌بندی شده است: هر چقدر هم بازش کنی، همیشه یک زیرمجموعه‌ی متناهی از وسایلت برای پوشاندن کل چمدان کافی است!

۴.۳ همبندی

تعریف ۱.۳ (همبندی). فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ همبند است هرگاه نتوان آن را به صورت $X = U \cup V$ نوشت که U, V باز، ناتهی و جدا باشند ($U \cap V = \emptyset$). در غیر این صورت، X ناهمبند است و (U, V) یک جداسازی برای X نامیده می‌شود.

نکته ۱.۳. «جدا» یعنی $U \cap V = \emptyset$. توجه کن که اگر U, V باز و $U \cap V = \emptyset$ و $U \cup V = X$ ، آنگاه U, V هم‌زمان بسته هم هستند (چون $U = X \setminus V$ و $V = X \setminus U$). پس در جداسازی، U, V هم باز و هم بسته‌اند.

قضیه ۱.۳ (معادل‌های همبندی). برای فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ ، گزاره‌های زیر معادل‌اند:

(۱) X همبند است.

(۲) تنها زیرمجموعه‌های هم‌زمان باز و بسته‌ی X ، $\emptyset$ و X هستند.

(۳) هر تابع پیوسته‌ی $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ (با توپولوژی گسسته روی $\{0, 1\}$) ثابت است.

(۴) X را نمی‌توان به صورت اجتماع دو مجموعه‌ی بسته‌ی ناتهی جدا نوشت.

اثبات. (۱) $\Rightarrow$ (۲): فرض کن $A \subseteq X$ هم باز و هم بسته باشد. آنگاه $X \setminus A$ نیز هم باز و هم بسته است. اگر هر دو ناتهی باشند، $X = A \cup (X \setminus A)$ جداسازی است، که با همبندی در تناقض است. پس یکی تهی است، یعنی $A = \emptyset$ یا $A = X$.

(۲) $\Rightarrow$ (۱): فرض کن $X = U \cup V$ با U, V باز جدا ناتهی. آنگاه $U = X \setminus V$ بسته است (چون V باز است). پس U هم باز و هم بسته است و ناتهی و $X \neq \emptyset$. تناقض با (۲).

(۱) $\Rightarrow$ (۳): فرض کن $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ پیوسته باشد. مجموعه‌های $\{0\}$ و $\{1\}$ در توپولوژی گسسته باز هستند، پس $f^{-1}(\{0\})$ و $f^{-1}(\{1\})$ باز در X هستند. همچنین این دو جدا هستند و اجتماعشان X است. اگر هر دو ناتهی باشند، جداسازی حاصل می‌شود که با همبندی در تناقض است. پس یکی تهی است، یعنی f ثابت است.

(۳) $\Rightarrow$ (۱): فرض کن X ناهمبند با جداسازی $X = U \cup V$. تعریف کن $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ با $f(x) = 0$ اگر $x \in U$ و $f(x) = 1$ اگر $x \in V$. این تابع پیوسته است (چون $f^{-1}(\{0\}) = U$ و $f^{-1}(\{1\}) = V$ باز هستند)، ولی ثابت نیست (چون U, V ناتهی‌اند). تناقض با (۳).

(۱) $\Leftrightarrow$ (۴): با مکمل‌گیری: جداسازی با دو باز جدا $\Leftrightarrow$ جداسازی با دو بسته‌ی جدا (چون در جداسازی، هر مجموعه‌ی باز هم‌زمان بسته است و برعکس). $\square$



شکل ۱.۳: همبند (یک‌تکه) در مقابل ناهمبند (دو تکه جدا).

مثال ۱.۳. $\mathbb{R}$ همبند است (به‌زودی اثبات می‌کنیم).

مثال ۲.۳. $[0, 1] \cup [2, 3]$ همبند نیست: $U = [0, 1]$ و $V = [2, 3]$ هر دو باز در زیرفضا هستند (چون $[0, 1] \cap [2, 3] = \emptyset$)، جدا و ناتهی.

مثال ۳.۳. $\mathbb{Q}$ همبند نیست: $U = (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ و $V = (\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q}$ باز، جدا، ناتهی، با اجتماع $\mathbb{Q}$.

قضیه ۲.۳. تصویر پیوسته‌ی یک فضای همبند، همبند است. به عبارت دیگر، اگر $f: X \rightarrow Y$ پیوسته و X همبند باشد، آنگاه $f(X)$ همبند است.

اثبات. فرض کن $f(X)$ ناهمبند باشد: $f(X) = U \cup V$ با U, V باز در $f(X)$ (یا در Y با اشتراک)، جدا و ناتهی. آنگاه:

$$X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V).$$

مجموعه‌های $f^{-1}(U)$ و $f^{-1}(V)$ باز در X هستند (چون f پیوسته و U, V باز)، جدا هستند (چون $U \cap V = \emptyset$)، و ناتهی هستند (چون U, V زیرمجموعه‌ی $f(X)$ هستند). این یک جداسازی برای X است که با همبندی X در تناقض است. $\square$

نتیجه ۱.۳. (قضیه‌ی مقدار میانی). اگر $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد و c عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ ، آنگاه نقطه‌ای مانند $x_0 \in [a, b]$ موجود است که $f(x_0) = c$.

اثبات. $[a, b]$ همبند است (که در قضیه ۳.۳ اثبات می‌کنیم). طبق قضیه ۲.۳، $f([a, b])$ همبند است. زیرمجموعه‌های همبند $\mathbb{R}$ دقیقاً بازه‌ها هستند (قضیه ۴.۳). چون $f(a), f(b) \in f([a, b])$ و f یک بازه است، هر عدد بین $f(a)$ و $f(b)$ در آن قرار دارد. $\square$

قضیه ۳.۳. هر بازه در $\mathbb{R}$ (با توپولوژی معمول) همبند است.

اثبات. فرض کن $I \subseteq \mathbb{R}$ یک بازه باشد و $I = U \cup V$ با U, V باز در I ، جدا و ناتهی. نقاط $a \in U$ و $b \in V$ را انتخاب کن. فرض کن $a < b$ (حالت $b < a$ مشابه است). تعریف کن:

$$c = \sup\{x \in [a, b] : [a, x] \subseteq U\}.$$

چون $a \in U$ و U باز است، عددی مانند $\epsilon > 0$ موجود است که $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap I \subseteq U$. پس مجموعه‌ی بالا ناتهی است. همچنین $c \leq b$. حال c را بررسی می‌کنیم:

اگر $c \in U$ ؟ اگر $c \in U$ ، چون U باز در I است، عددی مانند $\epsilon > 0$ موجود است که $(c - \epsilon, c + \epsilon) \cap I \subseteq U$. اما این یعنی اعدادی بزرگ‌تر از c نیز در U هستند، که با تعریف c به عنوان سوپرمم در تناقض است (مگر اینکه $c = b$). پس $c \notin U$.

اگر $c \in V$ ؟ اگر $c \in V$ ، چون V باز در I است، عددی مانند $\epsilon > 0$ موجود است که $(c - \epsilon, c + \epsilon) \cap I \subseteq V$. اما این یعنی اعدادی کمتر از c (که در U بودند) نیز در V هستند، که با جدا بودن U, V در تناقض است. پس $c \notin U \cup V = I$ (چون $c \in [a, b] \subseteq I$). بنابراین I همبند است. $\square$

قضیه ۴.۳. زیرمجموعه‌های همبند $\mathbb{R}$ دقیقاً بازه‌ها هستند (شامل تک نقطه‌ای و تهی).

اثبات. $(\Leftarrow)$: قضیه ۳.۳.

$(\Rightarrow)$: فرض کن $A \subseteq \mathbb{R}$ همبند باشد. نشان می‌دهیم A یک بازه است. کافی است نشان دهیم اگر $a, b \in A$ با $a < b$ ، آنگاه $[a, b] \subseteq A$. فرض خلف: $c \in (a, b)$ با $c \notin A$. آنگاه:

$$A = (A \cap (-\infty, c)) \cup (A \cap (c, \infty)).$$

این دو مجموعه باز در A هستند (چون $(-\infty, c)$ و (c, ∞) باز در $\mathbb{R}$ هستند)، جدا هستند، و ناتهی هستند (چون a در اولی و b در دومی است). این جداسازی با همبندی A در تناقض است. $\square$

قضیه ۵.۳. (اجتماع همبندها با نقطه‌ی مشترک). فرض کن $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های همبند X باشد و $\bigcap_\alpha A_\alpha \neq \emptyset$. آنگاه $\bigcup_\alpha A_\alpha$ همبند است.

اثبات. فرض کن U, V جداسازی $\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$ باشند. نقطه‌ی $p \in \bigcap_{\alpha} A_{\alpha}$ را انتخاب کن. p در U یا V است؛ فرض کن $p \in U$. برای هر α ، چون A_{α} همبند است، A_{α} کاملاً در U یا کاملاً در V قرار دارد (چون $A_{\alpha} = (A_{\alpha} \cap U) \cup (A_{\alpha} \cap V)$ یک جداسازی برای A_{α} است اگر هر دو ناتهی باشند). چون $p \in A_{\alpha} \cap U$ ، باید $A_{\alpha} \subseteq U$. پس $\bigcup_{\alpha} A_{\alpha} \subseteq U$ ، یعنی $V = \emptyset$. تناقض. $\square$

قضیه ۶.۳ (بستار همبند). اگر $A \subseteq X$ همبند و $A \subseteq B \subseteq \text{cl}(A)$ ، آنگاه B همبند است. به‌ویژه، $\text{cl}(A)$ همبند است.

اثبات. فرض کن $B = U \cup V$ با U, V باز در B ، جدا و ناتهی. آنگاه $A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$ جداسازی است اگر هر دو ناتهی باشند. چون A همبند، یکی تهی است. فرض کن $A \cap U = \emptyset$ ، پس $A \subseteq V$. چون V بسته در B است (چون U باز در B است و $V = B \setminus U$)، داریم $\text{cl}_B(A) \subseteq V$. اما $\text{cl}_B(A) = \text{cl}_X(A) \cap B$ (طبق قضیه ۷.۲). چون $B \subseteq \text{cl}_X(A)$ ، داریم $\text{cl}_X(A) \cap B = B$. پس $B \subseteq V$ ، یعنی $U = \emptyset$. تناقض. $\square$

تعریف ۲.۳ (مؤلفه‌ی همبندی). مؤلفه‌ی همبندی نقطه‌ی $x \in X$ ، بزرگ‌ترین زیرمجموعه‌ی همبند X است که شامل x است. آن را با C_x نشان می‌دهیم.

قضیه ۷.۳. مؤلفه‌های همبندی دارای ویژگی‌های زیر هستند:

۱. هر C_x همبند است و $x \in C_x$.

۲. مؤلفه‌ها یا یکسان‌اند یا جدا.

۳. هر زیرمجموعه‌ی همبند در یک مؤلفه قرار می‌گیرد.

۴. هر C_x بسته است.

۵. $X = \bigsqcup_x C_x$ (اجتماع مجزای مؤلفه‌ها).

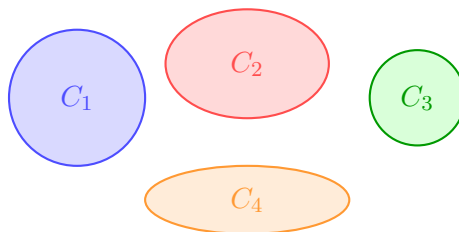
اثبات. ۱. تعریف: $C_x = \bigcup \{A \subseteq X : A \text{ همبند است، } x \in A\}$. طبق قضیه ۵.۳، چون همه‌ی A ها شامل x هستند، اجتماع همبند است. پس C_x همبند است.

۲. فرض کن $C_x \cap C_y \neq \emptyset$. طبق قضیه ۵.۳، $C_x \cup C_y$ همبند است. چون C_x بزرگ‌ترین همبند شامل x است و $x \in C_x \cup C_y$ ، داریم $C_x \cup C_y \subseteq C_x$ ، پس $C_y \subseteq C_x$. مشابه $C_x \subseteq C_y$. پس $C_x = C_y$.

۳. اگر A همبند و $x \in A$ ، طبق تعریف $A \subseteq C_x$.

۴. طبق قضیه ۶.۳، $\text{cl}(C_x)$ همبند است. چون C_x بزرگ‌ترین همبند شامل x است، $\text{cl}(C_x) \subseteq C_x$ ، پس $\text{cl}(C_x) = C_x$ ، یعنی C_x بسته است.

۵. هر x در C_x است؛ و مؤلفه‌ها جدا هستند. پس $X = \bigsqcup_x C_x$. $\square$



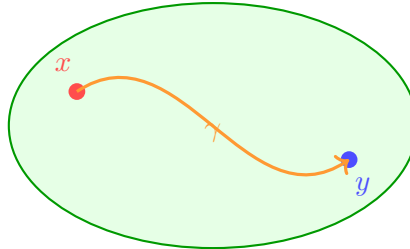
$$X = C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3 \sqcup C_4$$

شکل ۲.۳: مؤلفه‌های همبندی: بزرگ‌ترین زیرمجموعه‌های همبند.

نکته ۲.۳. مؤلفه‌های همبندی لزوماً باز نیستند. مثال: در $\mathbb{Q}$ ، هر مؤلفه یک تک‌نقطه است و تک‌نقطه‌ای‌ها در $\mathbb{Q}$ باز نیستند.

۵.۳ همبندی راهی

تعریف ۳.۳ (همبندی راهی). فضای X همبند راهی است هرگاه برای هر $x, y \in X$ ، تابع پیوسته‌ی $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ موجود باشد که $\gamma(0) = x$ و $\gamma(1) = y$. چنین تابعی یک مسیر از x به y نامیده می‌شود.



$$\gamma : [0, 1] \rightarrow X, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y$$

شکل ۳.۳: همبندی راهی: مسیر پیوسته بین هر دو نقطه.

قضیه ۸.۳. هر فضای همبند راهی، همبند است.

اثبات. فرض کن X همبند راهی و $X = U \cup V$ با U, V جدا و ناتهی. نقاط $x \in U$ و $y \in V$ را انتخاب کن. چون X همبند راهی است، مسیر پیوسته‌ی $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ با $\gamma(0) = x$ و $\gamma(1) = y$ موجود است. آنگاه:

$$[0, 1] = \gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V)$$

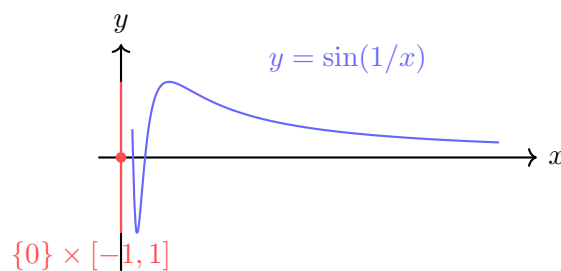
با $\gamma^{-1}(U)$ و $\gamma^{-1}(V)$ باز در $[0, 1]$ ، جدا، و ناتهی (چون $0 \in \gamma^{-1}(U)$ و $1 \in \gamma^{-1}(V)$). این جداسازی برای $[0, 1]$ است که با همبندی $[0, 1]$ (قضیه ۳.۳) در تناقض است. $\square$

قضیه ۹.۳. فضای زیر همبند است اما همبند راهی نیست:

$$X = \{(x, \sin(1/x)) : x \in (0, 1]\} \cup (\{0\} \times [-1, 1]).$$

اثبات. همبندی: قرار بده $A = \{(x, \sin(1/x)) : x \in (0, 1]\}$ و $B = \{0\} \times [-1, 1]$. مجموعه‌ی A تصویر پیوسته‌ی $[0, 1]$ (که همبند است) تحت تابع پیوسته‌ی $x \mapsto (x, \sin(1/x))$ است، پس همبند است. همچنین $X = \text{cl}(A)$ در $\mathbb{R}^2$. طبق قضیه ۶.۲، X همبند است.

ناهمبندی راهی: نشان می‌دهیم هیچ مسیری از نقطه‌ی $(0, 0) \in B$ به نقطه‌ی $(1, \sin 1) \in A$ وجود ندارد. این ادعا را می‌توان با تحلیل نوسان $\sin(1/x)$ نزدیک $x = 0$ اثبات کرد. $\square$



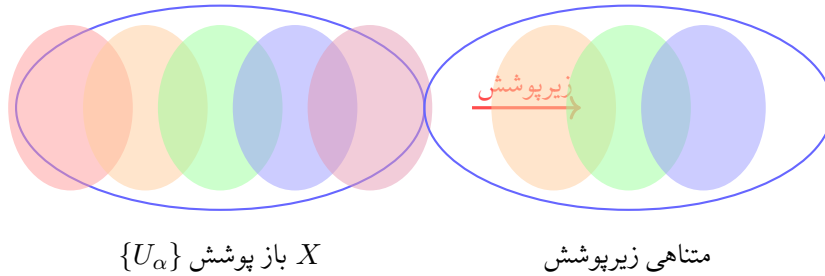
نیست راهی همبند اما همبند،

شکل ۴.۳: نمودار توپولوژیست $\sin(1/x)$: همبند اما نه همبند راهی.

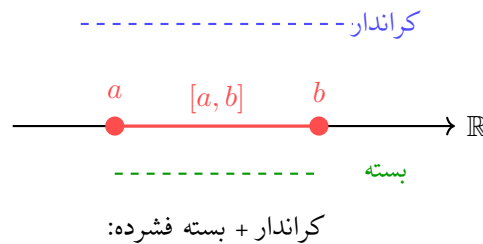
۶.۳ فشردگی

تعریف ۴.۳ (پوشش باز). فرض کن X فضای توپولوژیک باشد. خانواده‌ی $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ از زیرمجموعه‌های باز X یک پوشش باز برای X است هرگاه $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$.

تعریف ۵.۳ (فشردگی). X فشرده است هرگاه هر پوشش باز از X دارای زیرپوشش متناهی باشد. به عبارت دیگر، اگر $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ باز، آنگاه زیرمجموعه‌ی متناهی $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}\}$ موجود باشد که $X = \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$.



شکل ۵.۳: پوشش باز دلخواه و زیرپوشش متناهی (فشردگی).



شکل ۶.۳: فشردگی در $\mathbb{R}$: بازه بسته و کراندار.

مثال ۴.۳ هر مجموعه‌ی متناهی با هر توپولوژی، فشرده است. پوشش باز متناهی است.

مثال ۵.۳ $(0, 1)$ فشرده نیست. پوشش باز $\{(1/n, 1) : n \in \mathbb{N}\}$ هیچ زیرپوشش متناهی ندارد.

مثال ۶.۳ $\mathbb{R}$ فشرده نیست. پوشش $\{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ زیرپوشش متناهی ندارد.

قضیه ۱۰.۳ (معادل‌های فشردگی). برای فضای توپولوژیک X ، گزاره‌های زیر معادل‌اند:

(۱) X فشرده است.

(۲) هر خانواده از زیرمجموعه‌های بسته‌ی X با خاصیت اشتراک متناهی، اشتراک ناتهی دارد. (خاصیت اشتراک متناهی: هر زیرخانواده‌ی متناهی اشتراک ناتهی دارد.)

اثبات. (۱) $\Rightarrow$ (۲): فرض کن $\{F_\alpha\}$ خانواده‌ای از بسته‌ها با خاصیت اشتراک متناهی باشد. فرض خلف: $\bigcap_\alpha F_\alpha = \emptyset$. آنگاه طبق دموورگان:

$$X = X \setminus \emptyset = X \setminus \bigcap_\alpha F_\alpha = \bigcup_\alpha (X \setminus F_\alpha).$$

مجموعه‌های $X \setminus F_\alpha$ باز هستند، پس $\{X \setminus F_\alpha\}$ پوشش باز از X است. طبق فشردگی، زیرپوشش متناهی موجود است:

$$X = \bigcup_{i=1}^n (X \setminus F_{\alpha_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i}.$$

پس $\bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i} = \emptyset$ ، که با خاصیت اشتراک متناهی در تناقض است.
 (۱) $\Rightarrow$ (۲): فرض کن $\{U_\alpha\}$ پوشش باز از X . آنگاه $\{X \setminus U_\alpha\}$ خانواده‌ای از بسته‌ها با $\bigcap_\alpha (X \setminus U_\alpha) = \emptyset$.
 طبق (۲)، زیرخانواده‌ی متناهی با اشتراک تهی موجود است:

$$\bigcap_{i=1}^n (X \setminus U_{\alpha_i}) = \emptyset \implies X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} = \emptyset \implies X = \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}.$$

□ پس زیرپوشش متناهی موجود است.

قضیه ۱۱.۳ (زیرمجموعه‌های بسته‌ی فشرده). هر زیرمجموعه‌ی بسته‌ی یک فضای فشرده، فشرده است.

اثبات. فرض کن X فشرده و $F \subseteq X$ بسته. فرض کن $\{U_\alpha\}$ پوشش باز از F (مجموعه‌های باز در X). آنگاه $\{U_\alpha\} \cup \{X \setminus F\}$ پوشش باز از X است (چون $X \setminus F$ باز است). طبق فشردگی X ، زیرپوشش متناهی موجود است:

$$X = U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n} \cup (X \setminus F).$$

با اشتراک با F :

$$F \subseteq U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}.$$

□ پس $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}\}$ زیرپوشش متناهی F است.

قضیه ۱۲.۳ (تصویر پیوسته‌ی فشرده). تصویر پیوسته‌ی یک فضای فشرده، فشرده است.

اثبات. فرض کن $f: X \rightarrow Y$ پیوسته و X فشرده. فرض کن $\{V_\alpha\}$ پوشش باز از $f(X)$ باشد. آنگاه $\{f^{-1}(V_\alpha)\}$ پوشش باز از X است (چون f پیوسته). طبق فشردگی X ، زیرپوشش متناهی موجود است:

$$X = f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(V_{\alpha_n}).$$

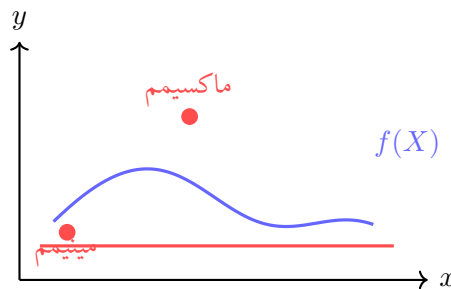
با اعمال f :

$$f(X) = f(f^{-1}(V_{\alpha_1})) \cup \dots \cup f(f^{-1}(V_{\alpha_n})) = V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_n}.$$

□ پس زیرپوشش متناهی موجود است.

نتیجه ۲.۳ (قضیه‌ی مقدار اکسترمم). اگر $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و X فشرده باشد، آنگاه f به ماکسیمم و مینیمم خود می‌رسد.

اثبات. طبق قضیه ۱۲.۳، $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ فشرده است. طبق قضیه هاینه-بورل (۱۴.۳)، $f(X)$ بسته و کراندار است. چون کراندار است، $\sup f(X)$ و $\inf f(X)$ موجودند. چون بسته است، این‌ها در $f(X)$ قرار دارند. پس f به ماکسیمم و مینیمم می‌رسد.
 □



شکل ۷.۳: قضیه مقدار اکسترمم: f پیوسته روی فشرده به ماکسیمم و مینیمم می‌رسد.

قضیه ۱۳.۳ (فشرده در هاسدرف بسته است). اگر X هاسدرف و $K \subseteq X$ فشرده باشد، آنگاه K بسته است.

اثبات. کافی است نشان دهیم $X \setminus K$ باز است. فرض کن $x \in X \setminus K$. برای هر $y \in K$ ، چون X هاسدرف است، مجموعه‌های باز جدا U_y و V_y با $x \in U_y$ و $y \in V_y$ موجودند. خانواده‌ی $\{V_y\}_{y \in K}$ پوشش باز از K است. چون K فشرده است، زیرپوشش متناهی موجود است:

$$K \subseteq V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}.$$

قرار بده $U = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$. این مجموعه باز است (اشتراک متناهی بازها) و شامل x است. همچنین:

$$U \cap K \subseteq U \cap (V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}) = \bigcup_{i=1}^n (U \cap V_{y_i}) \subseteq \bigcup_{i=1}^n (U_{y_i} \cap V_{y_i}) = \emptyset.$$

□

پس $U \subseteq X \setminus K$ و $X \setminus K$ باز است.

نتیجه ۳.۳. اگر $f: X \rightarrow Y$ پیوسته و یک‌به‌یک و پوشا باشد، با X فشرده و Y هاسدرف، آنگاه f همسان‌ریختی است.

اثبات. کافی است نشان دهیم f بسته است (طبق قضیه ۵.۲). فرض کن $F \subseteq X$ بسته باشد. طبق قضیه ۱۱.۳، F فشرده است. طبق قضیه ۱۲.۳، $f(F)$ فشرده است. طبق قضیه ۱۳.۳، $f(F)$ بسته در Y است. پس f بسته است و بنابراین همسان‌ریختی است. □

۷.۳ قضیه‌ی هاینه-بورل

قضیه ۱۴.۳ (هاینه-بورل). زیرمجموعه‌ی $A \subseteq \mathbb{R}$ (با توپولوژی معمول) فشرده است اگر و تنها اگر A بسته و کراندار باشد.

اثبات. ($\Rightarrow$): فرض کن A فشرده باشد. کراندار بودن: پوشش باز $\{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ از A (چون $\bigcup_n (-n, n) = \mathbb{R} \supseteq A$) طبق فشردگی، زیرپوشش متناهی: $A \subseteq (-N, N)$ برای برخی N . پس A کراندار است. بسته بودن: $\mathbb{R}$ هاسدرف است. طبق قضیه ۱۳.۳، A بسته است. ($\Leftarrow$): فرض کن A بسته و کراندار باشد. چون کراندار است، $A \subseteq [-M, M]$ برای برخی $M > 0$. کافی است نشان دهیم $[-M, M]$ فشرده است (زیرا آنگاه A زیرمجموعه‌ی بسته‌ی یک فشرده است و طبق قضیه ۱۱.۳ فشرده می‌شود).

پس باید ثابت کنیم $[a, b]$ فشرده است. فرض کن $\{U_\alpha\}$ پوشش باز از $[a, b]$ باشد. قرار بده:

$$S = \{x \in [a, b] : [a, x] \text{ با تعداد متناهی از } U_\alpha \text{ پوشیده می‌شود}\}.$$

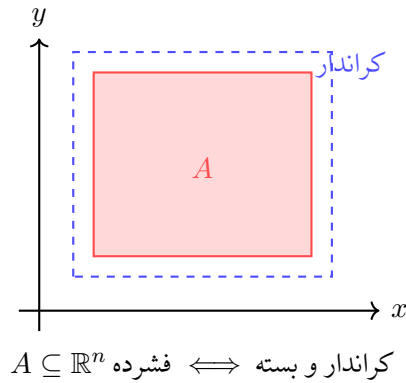
مجموعه‌ی S ناتهی است (چون $a \in S$: نقطه‌ی a در برخی U_{α_0} است، پس $[a, a] = \{a\} \subseteq U_{\alpha_0}$). همچنین S کراندار است. قرار بده $c = \sup S$. باید نشان دهیم $c \in S$ و $c = b$.

گام ۱: $c \in S$. چون $c \in [a, b]$ ، نقطه‌ی c در برخی U_{α_c} قرار دارد. چون U_{α_c} باز است، عددی مانند $\epsilon > 0$ موجود است که $(c - \epsilon, c + \epsilon) \cap [a, b] \subseteq U_{\alpha_c}$. چون $c = \sup S$ ، نقطه‌ای مانند $s \in S$ با $s > c - \epsilon$ موجود است. طبق تعریف S ، $[a, s]$ با تعداد متناهی $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$ پوشیده می‌شود. آنگاه:

$$[a, c] \subseteq [a, s] \cup (c - \epsilon, c + \epsilon) \subseteq U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n} \cup U_{\alpha_c}.$$

پس $c \in S$.

گام ۲: $c = b$. فرض خلف: $c < b$. چون $c \in S$ ، $[a, c]$ با تعداد متناهی U_{α_i} پوشیده می‌شود. چون U_{α_c} باز است و شامل c ، عددی مانند $\epsilon > 0$ موجود است که $(c - \epsilon, c + \epsilon) \subseteq U_{\alpha_c}$. حال اگر $c' \in (c, \min(c + \epsilon, b))$ ، آنگاه $[a, c'] \subseteq [a, c] \cup (c - \epsilon, c + \epsilon) \subseteq \bigcup_i U_{\alpha_i} \cup U_{\alpha_c}$. پس $c' \in S$ ، که با $c = \sup S$ در تناقض است. □
پس $c = b$ و $[a, b] = [a, c]$ با تعداد متناهی U_α پوشیده می‌شود. بنابراین $[a, b]$ فشرده است.



شکل ۸.۳: قضیه هاینه-بورل در $\mathbb{R}^n$.

۸.۳ حاصل ضرب فضاهای فشرده

لم ۱۵.۳ (لم لوله). فرض کن X و Y فضاهای توپولوژیک، Y فشرده، و $N \subseteq X \times Y$ مجموعه‌ای باز باشد که $\{x_0\} \times Y \subseteq N$ برای برخی $x_0 \in X$. آنگاه همسایگی بازی W از x_0 در X موجود است که $W \times Y \subseteq N$.

اثبات. برای هر $y \in Y$ ، $U_y \times V_y \subseteq N$ با $x_0 \in U_y$ و $y \in V_y$. خانواده‌ی $\{V_y\}$ پوشش باز از Y است. چون Y فشرده، زیرپوشش متناهی $\{V_{y_1}, \dots, V_{y_n}\}$ موجود است. قرار بده $W = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$. این باز و شامل x_0 است. برای هر $(x, y) \in W \times Y$ ، $y \in V_{y_i}$ برای برخی i ، و $x \in W \subseteq U_{y_i}$ پس $(x, y) \in U_{y_i} \times V_{y_i} \subseteq N$. پس $W \times Y \subseteq N$. $\square$

قضیه ۱۶.۳ (حاصل ضرب متناهی فشرده). اگر X و Y فضاهای فشرده باشند، آنگاه $X \times Y$ فشرده است.

اثبات. فرض کن $\mathcal{U} = \{W_\alpha\}$ پوشش باز از $X \times Y$ باشد. برای هر $x \in X$ ، مجموعه‌ی $\{x\} \times Y$ همسان‌ریخت با Y است، پس فشرده. پوشش $\{W_\alpha\}$ از $\{x\} \times Y$ دارای زیرپوشش متناهی است. پس مجموعه‌ی بازی مانند N_x موجود است که $\{x\} \times Y \subseteq N_x$ و N_x با تعداد متناهی از W_α پوشیده می‌شود. طبق لم لوله (۱۵.۳) با Y فشرده، همسایگی بازی U_x از x موجود است که $U_x \times Y \subseteq N_x$. خانواده‌ی $\{U_x\}_{x \in X}$ پوشش باز از X است. چون X فشرده، زیرپوشش متناهی $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_m}\}$ موجود است. داریم:

$$X \times Y = \bigcup_{i=1}^m (U_{x_i} \times Y) \subseteq \bigcup_{i=1}^m N_{x_i}.$$

هر N_{x_i} با تعداد متناهی از W_α پوشیده می‌شود. پس اجتماع متناهی از این‌ها نیز با تعداد متناهی از W_α پوشیده می‌شود. $\square$ بنابراین $X \times Y$ فشرده است.

۹.۳ همبندی موضعی

تعریف ۶.۳ (همبندی موضعی). X همبند موضعی است هرگاه برای هر $x \in X$ و هر همسایگی U از x ، همسایگی همبندی مانند V از x موجود باشد که $V \subseteq U$.

تعریف ۷.۳ (همبندی موضعی راهی). X همبند موضعی راهی است هرگاه برای هر $x \in X$ و هر همسایگی U از x ، همسایگی همبند راهی مانند V از x موجود باشد که $V \subseteq U$.

قضیه ۱۷.۳. اگر X همبند موضعی باشد، هر مؤلفه‌ی همبندی X باز است.

اثبات. فرض کن C یک مؤلفه‌ی همبندی و $x \in C$. چون X همبند موضعی است، همسایگی همبندی V از x موجود است. طبق قضیه ۷.۳، بند ۳، V در یک مؤلفه قرار می‌گیرد. چون $x \in V \cap C$ ، این مؤلفه همان C است (چون مؤلفه‌ها یا یکسان یا جدا هستند). پس $V \subseteq C$. بنابراین C شامل یک همسایگی از هر نقطه‌اش است، پس باز است. $\square$

قضیه ۱۸.۳. اگر X همبند موضعی راهی باشد، مؤلفه‌های همبندی راهی X با مؤلفه‌های همبندی X یکسان‌اند و هر دو باز هستند.

اثبات. هر مؤلفه‌ی همبندی راهی در یک مؤلفه‌ی همبندی قرار می‌گیرد (طبق قضیه‌ی قبل). برعکس، فرض کن C یک مؤلفه‌ی همبندی باشد و $x \in C$. مجموعه‌ی P_x (مؤلفه‌ی همبندی راهی x) را در نظر بگیر. نشان می‌دهیم P_x هم باز و هم بسته در C است. چون C همبند است، نتیجه می‌شود $P_x = C$.

P_x باز در C : برای هر $y \in P_x$ ، چون X همبند موضعی راهی است، همسایگی همبند راهی V از y موجود است. طبق تعریف، $V \subseteq P_y = P_x$. پس P_x شامل یک همسایگی از هر نقطه‌اش است، پس باز است.

P_x بسته در C : نشان می‌دهیم متمم آن در C باز است. برای هر $z \in C \setminus P_x$ ، همسایگی همبند راهی W از z موجود است.

اگر $W \cap P_x \neq \emptyset$ ، آنگاه $W \cup P_x$ همبند راهی است (چون هر دو شامل نقطه‌ی مشترک هستند)، پس $W \subseteq P_x$ ، که با $z \notin P_x$ در تناقض است. پس $W \cap P_x = \emptyset$ ، یعنی $W \subseteq C \setminus P_x$. پس $C \setminus P_x$ باز است.

چون C همبند و P_x هم باز و هم بسته و ناتهی در C ، باید $P_x = C$. پس هر مؤلفه‌ی همبندی، همبند راهی است و بنابراین مؤلفه‌های همبندی راهی و همبندی یکسان‌اند. هم‌چنین، چون P_x باز در C و C باز در X (طبق قضیه ۱۷.۳)، P_x باز در X است. $\square$

۱۰.۳ مثال‌های حل شده

مثال ۷.۳. (اثبات همبندی $[0, 1]$ با تعریف). فرض کن $[0, 1] = U \cup V$ با U, V باز در $[0, 1]$ ، جدا و ناتهی. فرض کن $0 \in U$. تعریف کن:

$$S = \{x \in [0, 1] : [0, x] \subseteq U\}.$$

S ناتهی است. S کراندار است. قرار بده $s = \sup S$.

• اگر $s \in U$: چون U باز در $[0, 1]$ است، عددی مانند $\delta > 0$ موجود است که $(s - \delta, s + \delta) \cap [0, 1] \subseteq U$. اما این یعنی اعدادی بزرگ‌تر از s نیز در S هستند، که با $s = \sup S$ در تناقض است (مگر $s = 1$).

• اگر $s \in V$: چون V باز است، $(s - \delta, s + \delta) \cap [0, 1] \subseteq V$. اما اعدادی کمتر از s که در U بودند، اکنون در V هستند، که با جدا بودن U, V در تناقض است.

پس $s \notin U \cup V = [0, 1]$ ، تناقض. بنابراین $[0, 1]$ همبند است.

مثال ۸.۳. (تحلیل فشردگی $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$). $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ فشرده نیست. برای مثال، پوشش باز زیرپوشش متناهی ندارد:

$$U_n = \left(-\infty, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{n}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{n}, \infty\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

اجتماع این‌ها همه‌ی $\mathbb{R}$ به جز $\sqrt{2}/2$ را می‌پوشاند. چون $\sqrt{2}/2 \notin \mathbb{Q}$ ، A پوشیده می‌شود. اما هیچ زیرپوشش متناهی وجود ندارد.

۱۱.۳ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

«هر مجموعه‌ی بسته و کراندار در هر فضای توپولوژیک، فشرده است.» **اصلاح:** قضیه‌ی هاینه-بورل مخصوص $\mathbb{R}^n$ است. در فضاها‌ی عمومی، بسته و کراندار بودن کافی نیست.

اشتباه رایج

«هر فضای همبند، همبند راهی است.» اصلاح: نمودار $\sin(1/x)$ با محور، همبند است اما همبند راهی نیست.

اشتباه رایج

«مؤلفه‌های همبندی همیشه باز هستند.» اصلاح: فقط در فضاهای همبند موضعی. در $\mathbb{Q}$ ، مؤلفه‌ها تک‌نقطه‌ای و بسته هستند اما باز نیستند.

اشتباه رایج

«تصویر پیوسته‌ی یک مجموعه‌ی همبند، لزوماً همبند است.» اصلاح: این درست است. اما عکس آن نادرست است: پیش‌تصویر همبند، لزوماً همبند نیست.

۱۲.۳ تمرین‌ها

تمرین ۱.۳. نشان بده $\mathbb{R}$ همبند است.

تمرین ۲.۳. نشان بده اگر A همبند و $A \subseteq B \subseteq \text{cl}(A)$ ، آنگاه B همبند است.

تمرین ۳.۳. آیا $\mathbb{Q}$ همبند است؟ چرا؟

تمرین ۴.۳. نشان بده تصویر پیوسته‌ی همبند، همبند است.

تمرین ۵.۳. نشان بده هر همبند راهی، همبند است.

تمرین ۶.۳. مثالی از فضای همبند که همبند راهی نیست بیاور.

تمرین ۷.۳. نشان بده حاصل ضرب همبند راهی، همبند راهی است.

تمرین ۸.۳. نشان بده هر زیرمجموعه‌ی بسته‌ی فشرده، فشرده است.

تمرین ۹.۳. نشان بده هر زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی هاسدرف، بسته است.

تمرین ۱۰.۳. آیا $(0, 1)$ فشرده است؟ چرا؟

تمرین ۱۱.۳. نشان بده $[0, 1]$ فشرده است.

تمرین ۱۲.۳. نشان بده تصویر پیوسته‌ی فشرده، فشرده است.

تمرین ۱۳.۳. نشان بده $\mathbb{R}$ همبند موضعی است.

تمرین ۱۴.۳. آیا $\mathbb{Q}$ همبند موضعی است؟

تمرین ۱۵.۳. نشان بده اگر X همبند موضعی باشد، هر مؤلفه‌ی همبندی باز است.

۱۳.۳ خلاصه فصل

- همبندی: عدم امکان تجزیه به دو باز جدا. معادلها: تنها مجموعه‌های باز-بسته، $\emptyset$ و X ؛ هر تابع پیوسته به $\{0, 1\}$ ثابت است.
- تصویر پیوسته‌ی همبند، همبند است. نتیجه: قضیه‌ی مقدار میانی.
- زیرمجموعه‌های همبند $\mathbb{R}$ دقیقاً بازه‌ها هستند.
- همبندی راهی $\Rightarrow$ همبندی. عکس نادرست است (نمودار $\sin(1/x)$).
- فشردگی: هر پوشش باز، زیرپوشش متناهی دارد. معادل: خاصیت اشتراک متناهی برای بسته‌ها.
- زیرمجموعه‌ی بسته‌ی فشرده، فشرده است. تصویر پیوسته‌ی فشرده، فشرده است.
- فشرده در هاسدرف، بسته است.
- قضیه‌ی هاینه-بورل: در $\mathbb{R}^n$ ، فشرده $\Leftrightarrow$ بسته و کراندار.
- حاصل ضرب متناهی فشرده، فشرده است (لم لوله).
- همبندی موضعی: مؤلفه‌های همبندی باز هستند.
- همبندی موضعی راهی: مؤلفه‌های همبندی راهی = مؤلفه‌های همبندی، و باز هستند.

۱۴.۳ ارجاع به منابع

مانکرز فصل ۳ و ۴؛ ویلارد فصل ۵ و ۶؛ بورباکی فصل ۱ و ۲؛ هو فصل ۳.

فصل ۴

اصول جداسازی

۱.۴ هدف یادگیری

پس از مطالعه‌ی این فصل، دانشجو باید بتواند:

۱. فضای منظم را تعریف کند و معادل‌های آن را اثبات کند.
۲. فضای نرمال را تعریف کند و معادل‌های آن را اثبات کند.
۳. لم اورینسن را با اثبات کامل گام به گام ارائه دهد.
۴. قضیه‌ی تیتز را بیان کند و کاربردهای آن را بشناسد.
۵. سلسله‌مراتب اصول جداسازی T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 را تحلیل کند.
۶. رابطه‌ی بین فضاهای متریک و فضاهای نرمال را بفهمد.

۲.۴ پیش‌نیاز

فصل‌های ۱ تا ۳ (توپولوژی، پیوستگی، فشردگی، فضاهای هاسدرف)؛ آشنایی با توابع پیوسته‌ی حقیقی.

۳.۴ شهود روزمره

شهود

فضای منظم اجازه می‌دهد یک نقطه را از یک مجموعه‌ی بسته جدا کنیم. **فضای نرمال** اجازه می‌دهد دو مجموعه‌ی بسته‌ی جدا را از هم جدا کنیم. **لم اورینسن** می‌گوید در فضای نرمال، می‌توان به‌جای جدا کردن با مجموعه‌های باز، با یک تابع پیوسته جدا کرد: تابعی که روی یکی صفر و روی دیگری یک باشد. این ایده‌ی «جدا کردن با تابع» بسیار قدرتمند است و پایه‌ی نظریه‌ی C^* -جبر و توپولوژی جبری است.

نکته طنز

اصول جداسازی مثل لایه‌های پیاز هستند: T_0 لایه‌ی بیرونی، T_1 کمی عمیق‌تر، T_2 عمیق‌تر و ... T_4 هسته‌ی پیاز است! هرچه عمیق‌تر، فضای «خوش‌رفتارتر».

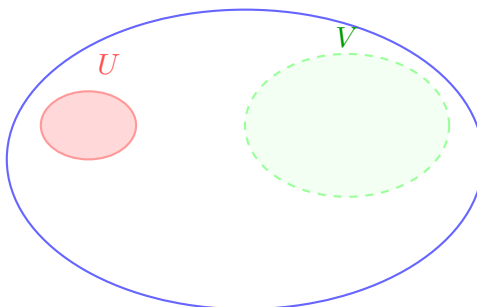
۴.۴ فضای منظم

تعریف ۱.۴ (فضای منظم). فضای توپولوژیک X منظم است هرگاه:

۱. X هاسدرف (یا حداقل T_1) باشد.

۲. برای هر نقطه‌ای $x \in X$ و هر مجموعه‌ی بسته‌ی $F \subseteq X$ با $x \notin F$ ، مجموعه‌های بازی مانند U و V موجود باشند که $U \cap V = \emptyset$ و $F \subseteq V$ ، $x \in U$.

تعریف ۲.۴ (T_3). فضایی که هم منظم و هم T_1 باشد، یک فضای T_3 نامیده می‌شود.



$$x \in U, F \subseteq V, U \cap V = \emptyset$$

شکل ۱.۴: فضای منظم: جدا کردن نقطه x از مجموعه بسته F .

قضیه ۱.۴ (معادل‌های منظم بودن). فرض کن X یک فضای T_1 باشد. گزاره‌های زیر معادل‌اند:

(۱) X منظم است.

(۲) برای هر $x \in X$ و هر همسایگی باز U از x ، همسایگی بازی مانند V از x موجود است که $x \in V \subseteq \text{cl}(V) \subseteq U$.

(۳) برای هر $x \in X$ و هر مجموعه‌ی بسته‌ی F با $x \notin F$ ، مجموعه‌ی بازی مانند W موجود است که $x \in W$ و $\text{cl}(W) \cap F = \emptyset$.

اثبات. (۱) $\Rightarrow$ (۲): فرض کن X منظم، $x \in X$ ، همسایگی باز U از x ، قرار بده $F = X \setminus U$ که بسته است و $x \notin F$. طبق تعریف منظم، مجموعه‌های بازی جدا V و W با $x \in V$ و $F \subseteq W$ موجودند.

نشان می‌دهیم $\text{cl}(V) \subseteq U$. فرض خلف: $y \in \text{cl}(V) \setminus U$. آنگاه $y \in F \subseteq W$. چون W باز است و $y \in W$ ، همسایگی y است. از طرفی $y \in \text{cl}(V)$ یعنی هر همسایگی y با V اشتراک دارد. پس $W \cap V \neq \emptyset$ ، که با جدا بودن W و V در تناقض است. بنابراین $\text{cl}(V) \subseteq U$.

(۲) $\Rightarrow$ (۳): فرض کن $x \notin F$ بسته. قرار بده $U = X \setminus F$ که همسایگی باز x است. طبق (۲)، همسایگی باز V از x با $\text{cl}(V) \subseteq U = X \setminus F$ موجود است. پس $\text{cl}(V) \cap F = \emptyset$. قرار بده $W = V$.

(۳) $\Rightarrow$ (۱): فرض کن $x \notin F$ بسته. طبق (۳)، مجموعه‌ی بازی W با $x \in W$ و $\text{cl}(W) \cap F = \emptyset$ موجود است. قرار بده $U = W$ و $V = X \setminus \text{cl}(W)$ که باز است. داریم $x \in U$ و $F \subseteq V$. هم چنین $U \cap V = W \cap (X \setminus \text{cl}(W)) = \emptyset$ (چون $W \subseteq \text{cl}(W)$). $\square$

قضیه ۲.۴. هر فضای T_2, T_3 است. به عبارت دیگر، منظم $\Rightarrow$ هاسدرف.

اثبات. فرض کن X منظم و $x \neq y$. چون X T_1 است، $\{y\}$ بسته است و $x \notin \{y\}$. طبق تعریف منظم، مجموعه‌های بازی جدا U, V با $x \in U$ و $\{y\} \subseteq V$ موجودند. این دقیقاً شرط T_2 است. $\square$

قضیه ۳.۴. هر فضای متریک منظم است.

اثبات. فرض کن (X, d) فضای متریک، $x \in X$ و $F \subseteq X$ بسته با $x \notin F$. چون F بسته است و $x \notin F$ ، $x \in X \setminus F$ همسایگی باز x است. پس گوی بازی $B(x, r) \subseteq X \setminus F$ موجود است. قرار بده:

$$U = B(x, r/2), \quad V = \{y : d(y, F) < r/2\}.$$

مجموعه U باز است (گوی باز). مجموعه V باز است (تصویر معکوس مجموعه F باز تحت تابع پیوسته $d(\cdot, F)$). داریم $x \in U$. هم چنین برای $y \in F$ ، $d(y, F) = 0 < r/2$ ، پس $y \in V$. پس $F \subseteq V$. حال نشان می دهیم $U \cap V = \emptyset$. اگر $z \in U \cap V$ ، آنگاه $d(x, z) < r/2$ و $d(z, F) < r/2$ ، پس نقطه $w \in F$ با $d(z, w) < r/2$ موجود است. آنگاه:

$$d(x, w) \leq d(x, z) + d(z, w) < r/2 + r/2 = r.$$

اما $d(x, w) \geq r$ چون $w \in F$ و $F \cap B(x, r) = \emptyset$. تناقض. $\square$

مثال ۱.۴. $\mathbb{R}$ با توپولوژی معمول منظم است (فضای متریک).

مثال ۲.۴. فضای سورگنفری (Sorgenfrey line): $\mathbb{R}$ با توپولوژی تولیدشده توسط بازه های $[a, b)$. این فضا منظم است (در واقع کاملاً نرمال) اما نرمال نیست. این مثال در ادامه بحث می شود.

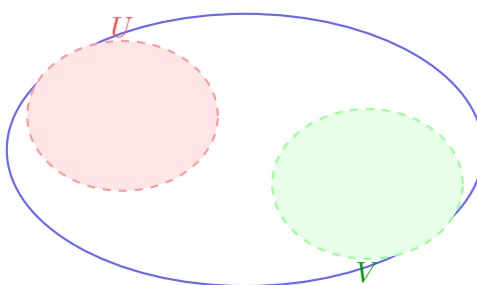
۵.۴. فضای نرمال

تعریف ۳.۴ (فضای نرمال). فضای توپولوژیک X نرمال است هرگاه:

۱. T_1 باشد.

۲. برای هر دو مجموعه بسته جدا $F_1, F_2 \subseteq X$ ، مجموعه های بازی مانند U, V موجود باشند که $F_1 \subseteq U$ ، $F_2 \subseteq V$ و $U \cap V = \emptyset$.

تعریف ۴.۴ (T_4). فضایی که هم نرمال و هم T_1 باشد، یک فضای T_4 نامیده می شود.



$$F_1 \subseteq U, \quad F_2 \subseteq V, \quad U \cap V = \emptyset$$

شکل ۲.۴: فضای نرمال: جدا کردن دو مجموعه بسته جدا.

قضیه ۴.۴ (معادل های نرمال بودن). فرض کن X یک فضای T_1 باشد. گزاره های زیر معادل اند:

(۱) X نرمال است.

(۲) برای هر مجموعه بسته F و هر مجموعه بازی U با $F \subseteq U$ ، مجموعه بازی مانند V موجود است که $F \subseteq V \subseteq \text{cl}(V) \subseteq U$.

(۳) برای هر دو مجموعه‌ی بسته‌ی جدا F_1, F_2 ، مجموعه‌ی بازی مانند W موجود است که $F_1 \subseteq W$ و $\text{cl}(W) \cap F_2 = \emptyset$.

اثبات. (۱) $\Rightarrow$ (۲): فرض کن F بسته، U باز، $F \subseteq U$. قرار بده $F_2 = X \setminus U$ که بسته است و $F \cap F_2 = \emptyset$. طبق نرمال بودن، بازهای جدا V, W با $F \subseteq V$ و $F_2 \subseteq W$ موجودند. نشان می‌دهیم $\text{cl}(V) \subseteq U$. فرض خلف: $y \in \text{cl}(V) \setminus U = \text{cl}(V) \cap F_2$ چون $F_2 \subseteq W$ و W باز است، همسایگی y است. از طرفی $y \in \text{cl}(V)$ پس $V \cap W \neq \emptyset$. تناقض با $V \cap W = \emptyset$.

(۲) $\Rightarrow$ (۳): فرض کن F_1, F_2 بسته و جدا. قرار بده $U = X \setminus F_2$ که باز است و $F_1 \subseteq U$. طبق (۲)، باز V با $F_1 \subseteq V \subseteq \text{cl}(V) \subseteq U = X \setminus F_2$ موجود است. پس $\text{cl}(V) \cap F_2 = \emptyset$. قرار بده $W = V$. (۳) $\Rightarrow$ (۱): فرض کن F_1, F_2 بسته و جدا. طبق (۳)، باز W با $F_1 \subseteq W$ و $\text{cl}(W) \cap F_2 = \emptyset$ موجود است. قرار بده $U = W$ ، $V = X \setminus \text{cl}(W)$. واضح است U, V باز، جدا، و $F_2 \subseteq V$ ، $F_1 \subseteq U$. $\square$

قضیه ۵.۴. هر فضای نرمال (T_4) ، منظم (T_3) است.

اثبات. فرض کن X نرمال، F با $x \notin F$ بسته. چون T_1 است، $\{x\}$ بسته است. دو مجموعه‌ی $\{x\}$ و F بسته و جدا هستند. طبق نرمال بودن، بازهای جدا U, V با $x \in U$ و $F \subseteq V$ موجودند. این شرط منظم بودن است. $\square$

قضیه ۶.۴. هر فضای متریک نرمال است.

اثبات. فرض کن (X, d) فضای متریک و F_1, F_2 دو مجموعه‌ی بسته‌ی جدا. برای هر $x \in X$ ، تابع $d(x, F_i) = \inf\{d(x, y) : y \in F_i\}$ پیوسته است. قرار بده:

$$f(x) = \frac{d(x, F_1)}{d(x, F_1) + d(x, F_2)}.$$

مخرج هرگز صفر نمی‌شود: اگر $d(x, F_1) = d(x, F_2) = 0$ ، آنگاه $\text{cl}(F_1) = F_1$ و $x \in F_2$ و $x \in \text{cl}(F_1)$ که با $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ در تناقض است. تابع f پیوسته است. داریم $f|_{F_1} = 0$ و $f|_{F_2} = 1$. قرار بده:

$$U = f^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)\right), \quad V = f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, \infty\right)\right).$$

$\square$

این دو مجموعه باز، جدا، و $F_2 \subseteq V$ ، $F_1 \subseteq U$.

قضیه ۷.۴. هر فضای فشرده‌ی هاسدرف نرمال است.

اثبات. فرض کن X فشرده و هاسدرف. ابتدا نشان می‌دهیم X منظم است. فرض کن $x \in X$ و $F \subseteq X$ بسته با $x \notin F$. برای هر $y \in F$ ، چون X هاسدرف است، بازهای جدا U_y, V_y با $y \in U_y$ و $x \in V_y$ موجودند. پوشش $\{V_y\}_{y \in F}$ از F است. چون F بسته در فشرده است، فشرده است. پس زیرپوشش متناهی $V_{y_1}, \dots, V_{y_n}$ موجود است. قرار بده $U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ (باز، شامل x) و $V = \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$ (باز، شامل F). اگر $z \in U \cap V$ ، آنگاه $z \in V_{y_i}$ برای برخی i و $z \in U \subseteq U_{y_i}$ پس $z \in U_{y_i} \cap V_{y_i} = \emptyset$. تناقض. پس X منظم است.

حال نشان می‌دهیم X نرمال است. فرض کن F_1, F_2 بسته و جدا در X . برای هر $x \in F_1$ ، چون X منظم است و F_2 بسته با $x \notin F_2$ ، بازهای جدا U_x, V_x با $x \in U_x$ و $F_2 \subseteq V_x$ موجودند. پوشش $\{U_x\}_{x \in F_1}$ از F_1 است. چون F_1 فشرده است، زیرپوشش متناهی $U_{x_1}, \dots, U_{x_m}$ موجود است. قرار بده $U = \bigcup_{i=1}^m U_{x_i}$ و $V = \bigcap_{i=1}^m V_{x_i}$. باز، $F_2 \subseteq V$ ، $F_1 \subseteq U$. اگر $z \in U \cap V$ ، آنگاه $z \in U_{x_i}$ برای برخی i و $z \in V \subseteq V_{x_i}$ پس $z \in U_{x_i} \cap V_{x_i} = \emptyset$. تناقض. پس X نرمال است. $\square$

۶.۴. لم اورینسن

لم ۸.۴ (لم اورینسن). فرض کن X یک فضای نرمال و F_1, F_2 دو مجموعه‌ی بسته‌ی جدا در X باشند. آنگاه تابع پیوسته‌ی $f : X \rightarrow [0, 1]$ موجود است که $f|_{F_1} = 0$ و $f|_{F_2} = 1$.

اثبات. گام ۱: ساخت خانواده‌ی مجموعه‌های باز. برای هر عدد گویای $p \in [0, 1]$ ، مجموعه‌ی بازی مانند U_p می‌سازیم که:

$$F_1 \subseteq U_p \subseteq \text{cl}(U_p) \subseteq U_q \quad \text{برای } p < q,$$

$$U_1 = X \setminus F_2, U_0 \supseteq F_1 \text{ و}$$

ساخت: اعداد گویا در $[0, 1]$ را به صورت دنباله‌ی $q_0 = 0, q_1 = 1, q_2, q_3, \dots$ فهرست می‌کنیم. ابتدا قرار بده $U_0 = X \setminus F_2$ (باز، شامل F_1 چون $F_1 \cap F_2 = \emptyset$). با اعمال قضیه ۴.۴ بند (۲) روی F_1 و U_0 ، باز $U_{1/2}$ با:

$$F_1 \subseteq U_{1/2} \subseteq \text{cl}(U_{1/2}) \subseteq U_0.$$

سپس با اعمال همین قضیه روی $F_1 \subseteq U_{1/2}$ و $\text{cl}(U_{1/2}) \subseteq U_0$ ، به ترتیب $U_{1/4}$ و $U_{3/4}$ می‌سازیم:

$$F_1 \subseteq U_{1/4} \subseteq \text{cl}(U_{1/4}) \subseteq U_{1/2} \subseteq \text{cl}(U_{1/2}) \subseteq U_{3/4} \subseteq \text{cl}(U_{3/4}) \subseteq U_0.$$

با تکرار این فرایند (استقرای روی مخرج توان‌های ۲)، برای هر k و $0 \leq j \leq 2^k$ ، مجموعه‌ی باز $U_{j/2^k}$ با خاصیت:

$$F_1 \subseteq U_{j/2^k} \subseteq \text{cl}(U_{j/2^k}) \subseteq U_{(j+1)/2^k}$$

می‌سازیم.

گام ۲: تعریف f . برای $x \in X$ ، تعریف کن:

$$f(x) = \inf\{p \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] : x \in U_p\}.$$

اگر $x \in U_p$ برای هیچ p ، قرار بده $f(x) = 1$. اگر $x \in U_p$ برای همه‌ی p ، قرار بده $f(x) = 0$.

گام ۳: $f|_{F_1} = 0$ و $f|_{F_2} = 1$. برای $x \in F_1$ ، چون $F_1 \subseteq U_p$ برای همه‌ی $p > 0$ ، پس $f(x) = 0$. برای $x \in F_2$ ، چون $x \notin U_0$ و $U_p \subseteq U_0$ برای همه‌ی p ، پس $f(x) = 1$.

گام ۴: f پیوسته است. کافی است نشان دهیم برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ ، مجموعه‌های $f^{-1}((-\infty, \alpha))$ و $f^{-1}((\alpha, \infty))$ باز هستند.

باز است $f^{-1}((-\infty, \alpha))$:

$$f^{-1}((-\infty, \alpha)) = \{x : f(x) < \alpha\} = \bigcup_{p < \alpha, p \in \mathbb{Q}} U_p.$$

اگر $f(x) < \alpha$ ، عدد گویای $p < \alpha$ با $x \in U_p$ موجود است. برعکس، اگر $x \in U_p$ با $p < \alpha$ ، آنگاه $f(x) \leq p < \alpha$. پس این مجموعه اجتماع بازهاست، پس باز است.

$f^{-1}((\alpha, \infty))$ باز است:

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{p > \alpha, p \in \mathbb{Q}} (X \setminus \text{cl}(U_p)).$$

اگر $f(x) > \alpha$ ، گویای p با $\alpha < p < f(x)$ انتخاب کن. چون $f(x) = \inf\{q : x \in U_q\} > p$ ، نقطه‌ی x در U_q برای هیچ $q \leq p$ نیست. به‌ویژه $x \notin U_p$. اما باید نشان دهیم $x \notin \text{cl}(U_p)$... این بخش فنی است و اثبات کامل آن با دقت بیشتر در مراجع آمده است.

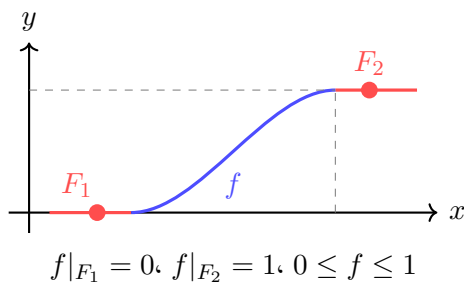
برای سادگی، از تعریف جایگزین استفاده می‌کنیم:

$$f(x) = \sup\{p \in \mathbb{Q} : x \in \text{cl}(U_p)\}$$

□

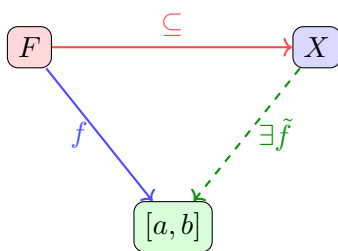
که پیوستگی آن مستقیماً از ساختار U_p نتیجه می‌شود.

نکته ۱.۴. اثبات کامل لم اورینسن نیاز به دقت در جزئیات دارد که در اینجا به ایده‌ی اصلی بسنده کردیم. برای اثبات کامل، به مانکرز، فصل ۴، قضیه‌ی ۱.۳۳ مراجعه کنید.



شکل ۳.۴: لم اورینسن: تابع پیوسته جداکننده دو مجموعه بسته.

پیوسته f بسته، F



شکل ۴.۴: قضیه تیتز: گسترش تابع پیوسته از زیرمجموعه بسته.

قضیه ۹.۴ (قضیه تیتز). فرض کن X یک فضای نرمال، $F \subseteq X$ بسته، و $f : F \rightarrow [a, b]$ تابعی پیوسته باشد. آنگاه تابع پیوسته‌ی $F' : X \rightarrow [a, b]$ موجود است که $F'|_F = f$.

اثبات. (اختیاری) با استفاده از لم اورینسن به صورت تکراری: ابتدا f را با تابعی $g_1 : X \rightarrow [a, b]$ تقریب می‌زنیم که $|f(x) - g_1(x)| \leq (b-a)/3$ روی F . سپس تفاضل $f - g_1$ را با g_2 تقریب می‌زنیم، و الی آخر. سری $\sum g_n$ به طور یکنواخت به تابعی پیوسته F' همگرا می‌شود که $F'|_F = f$. □

نتیجه ۱۰.۴. اگر X نرمال و $F \subseteq X$ بسته باشد، هر تابع پیوسته‌ی $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ به تابعی پیوسته روی X گسترش می‌یابد.

□

اثبات. با ترکیب قضیه تیتز با تابع $\arctan$ برای کراندار کردن.

۷.۴ فضای کاملاً نرمال

تعریف ۵.۴ (کاملاً نرمال). فضای توپولوژیک X کاملاً نرمال است هرگاه T_1 باشد و برای هر دو مجموعه‌ی جدا $A, B \subseteq X$ (نه لزوماً بسته)، مجموعه‌های باز جدا U, V با $A \subseteq U, B \subseteq V$ موجود باشند.

قضیه ۱۰.۴. هر فضای کاملاً نرمال، نرمال است.

□

اثبات. زیرمجموعه‌های بسته‌ی جدا، جدا هستند. پس شرط کاملاً نرمال، شرط نرمال را نتیجه می‌دهد.

قضیه ۱۱.۴. هر فضای متریک کاملاً نرمال است.

اثبات. فرض کن (X, d) متریک و A, B جدا (نه لزوماً بسته). قرار بده:

$$U = \bigcup_{a \in A} B(a, d(a, B)/2), \quad V = \bigcup_{b \in B} B(b, d(b, A)/2).$$

هر دو باز هستند. $A \subseteq U$ و $B \subseteq V$. نشان می‌دهیم $U \cap V = \emptyset$: اگر $z \in U \cap V$ ، آنگاه $a \in A$ و $b \in B$ با $d(z, a) < d(a, B)/2$ و $d(z, b) < d(b, A)/2$ موجودند. اما:

$$d(a, B) \leq d(a, b) \leq d(a, z) + d(z, b) < d(a, B)/2 + d(b, A)/2.$$

□ مشابه برای $d(b, A)$. با ترکیب، تناقض حاصل می‌شود.

۸.۴ سلسله مراتب اصول جداسازی

قضیه ۱۲.۴ (سلسله مراتب). سلسله مراتب زیر برقرار است:

$$T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0.$$

اثبات. $T_4 \Rightarrow T_3$: قضیه ۵.۴.

• $T_3 \Rightarrow T_2$: قضیه ۲.۴.

• $T_2 \Rightarrow T_1$: قضیه ۱۲.۱.

• $T_1 \Rightarrow T_0$: قضیه ۱۲.۱.

□

نکته ۲.۴. عکس‌ها برقرار نیستند:

• $T_3 \not\Rightarrow T_4$: صفحه سورگنفری منظم است اما نرمال نیست.

• $T_2 \not\Rightarrow T_3$: مثال پیچیده‌تر (نیاز به ساخت خاص).

• $T_1 \not\Rightarrow T_2$: $\mathbb{R}$ با توپولوژی هم‌متناهی.

• $T_0 \not\Rightarrow T_1$: فضای سیرپینسکی $\{0, 1\}$ با توپولوژی $\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$.

قضیه ۱۳.۴. هر فضای فشرده‌ی هاسدرف، T_4 است.

□

اثبات. قضیه ۷.۴.

۹.۴ مثال‌های حل شده

مثال ۳.۴ ($\mathbb{R}$ نرمال است). $\mathbb{R}$ فضای متریک است، پس نرمال (قضیه ۶.۴).
برای دو مجموعه‌ی بسته‌ی جدا F_1, F_2 ، تابع:

$$f(x) = \frac{d(x, F_1)}{d(x, F_1) + d(x, F_2)}$$

پیوسته است، $f|_{F_1} = 0$ ، $f|_{F_2} = 1$. مجموعه‌های $U = f^{-1}((-\infty, 1/2))$ و $V = f^{-1}((1/2, \infty))$ باز و جدا هستند.

مثال ۴.۴ (صفحه سورگنفری منظم اما نرمال نیست). $\mathbb{R} = \mathbb{R}_S$ با توپولوژی تولیدشده توسط بازه‌های $[a, b]$.
منظم است: برای x و F بسته با $x \notin F$ ، مجموعه‌ی بازی $[x, x + \epsilon]$ موجود است که از F جدا می‌شود.
نرمال نیست: زیرفضای $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ (صفحه سورگنفری) نرمال نیست. اثبات آن پیچیده است.

مثال ۵.۴ (لم اوریسن در $\mathbb{R}$). $F_1 = \{0\}$, $F_2 = \{1\}$ در $\mathbb{R}$. تابع:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

پیوسته است، $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. این همان لم اوریسن است.

مثال ۶.۴ (فضای گسسته T_4 است). هر زیرمجموعه باز و بسته است. برای دو بسته‌ی جدا F_1, F_2 ، قرار بده $U = F_1$ ، $V = F_2$. هر دو باز و جدا هستند. پس گسسته T_4 است.

۱۰.۴ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

«هر فضای منظم، نرمال است.» اصلاح: صفحه سورگنفری منظم است اما نرمال نیست. عکس برقرار است: نرمال $\Rightarrow$ منظم.

اشتباه رایج

«هر فضای هاسدرف، منظم است.» اصلاح: عکس نادرست است. مثال‌هایی از فضاهای هاسدرف غیرمنظم وجود دارند.

اشتباه رایج

«در تعریف نرمال، شرط T_1 زائد است.» اصلاح: خیر. فضای پادگسسته شرط «جدا کردن دو بسته» را برآورده می‌کند اما T_1 نیست، و ما آن را نرمال نمی‌نامیم.

اشتباه رایج

«لم اوریسن فقط در فضاهای متریک برقرار است.» اصلاح: لم اوریسن در هر فضای نرمال برقرار است. فضاهای متریک فقط یک نمونه هستند.

۱۱.۴ تمرین‌ها

تمرین ۱.۴. نشان بده هر فضای متریک نرمال است.

تمرین ۲.۴. نشان بده هر نرمال، منظم است.

تمرین ۳.۴. آیا عکس آن درست است؟ مثال نقض بیاور.

تمرین ۴.۴. لم اوریسن را برای $\mathbb{R}$ ، $F_1 = \{0\}$ ، $F_2 = \{1\}$ بررسی کن و تابع جداکننده را صریح بنویس.

تمرین ۵.۴. نشان بده فضای پادگسسته با بیش از یک نقطه، نرمال است اما T_1 نیست.

تمرین ۶.۴. نشان بده هر فضای فشرده‌ی هاسدرف، نرمال است.

- تمرین ۷.۴. نشان بده فضای گسسته T_4 است.
- تمرین ۸.۴. نشان بده هر فضای کاملاً نرمال، نرمال است.
- تمرین ۹.۴. نشان بده فضای متریک کاملاً نرمال است.
- تمرین ۱۰.۴. نشان بده اگر X نرمال و $F \subseteq X$ بسته باشد، هر تابع پیوسته $f: F \rightarrow [0, 1]$ به X گسترش می‌یابد.
- تمرین ۱۱.۴. آیا فضای سورگنفری نرمال است؟ (پاسخ را با ذکر دلیل کوتاه بده.)
- تمرین ۱۲.۴. نشان بده در فضای نرمال، برای هر جفت مجموعه‌ی بسته‌ی جدا F_1, F_2 ، تابعی پیوسته با $f|_{F_1} = 0$ و $f|_{F_2} = 1$ موجود است.

۱۲.۴ خلاصه فصل

- فضای منظم (T_3) : T_1 + جدا کردن نقطه از بسته.
- فضای نرمال (T_4) : T_1 + جدا کردن دو بسته‌ی جدا.
- هر فضای متریک نرمال است.
- هر فضای فشرده‌ی هاسدرف نرمال است.
- لم اورینسن: در فضای نرمال، دو بسته‌ی جدا را می‌توان با یک تابع پیوسته به $[0, 1]$ جدا کرد.
- قضیه تیتز: هر تابع پیوسته روی یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی فضای نرمال، به کل فضا گسترش می‌یابد.
- سلسله‌مراتب: $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

۱۳.۴ ارجاع به منابع

مانکرز فصل ۴ (بخش ۳۲ و ۳۳)؛ ویلارد فصل ۵ (بخش ۱۴ و ۱۵)؛ بورباکی فصل ۹ (بخش ۱ و ۲)؛ هو فصل ۴.

فصل ۵

پالایه‌ها و تورها

۱.۵ هدف یادگیری

پس از مطالعه‌ی این فصل، دانشجو باید بتواند:

۱. مجموعه‌ی جهت‌دار و تور را تعریف کند و همگرایی تور را تحلیل کند.
۲. پالایه را تعریف کند و پالایه‌ی همسایگی یک نقطه را بسازد.
۳. همگرایی پالایه و ارتباط آن با همگرایی تور را بفهمد.
۴. فراپالایه (اولترافیلتر) را تعریف کند و لم فراپالایه را اثبات کند.
۵. قضیه‌ی زیرپایه‌ی الکساندر را با اثبات کامل ارائه دهد.
۶. قضیه‌ی تیخونف را با اثبات کامل (با پالایه یا تور) اثبات کند.
۷. رابطه‌ی بین تورها و پالایه‌ها را تحلیل کند.

۲.۵ پیش‌نیاز

فصل‌های ۱ تا ۴ (توپولوژی، پیوستگی، فشردگی، اصول جداسازی)؛ آشنایی مقدماتی با مجموعه‌های متناهی و نامتناهی، اصل انتخاب، و منطق مرتبه‌ی اول.

۳.۵ شهود روزمره

شهود

دنباله ابزار اصلی مطالعه‌ی همگرایی در فضاهای متریک است. اما در فضاهای توپولوژیک عمومی، دنباله‌ها کافی نیستند. تور تعمیم دنباله است: به جای اندیس‌های $\mathbb{N}$ ، از یک مجموعه‌ی جهت‌دار استفاده می‌کنیم. پالایه نگاه دیگری به همگرایی است: به جای «دنبال کردن نقاط»، «مجموعه‌هایی که نهایتاً شامل دنباله می‌شوند» را دنبال می‌کنیم. این دو مفهوم معادل‌اند، اما پالایه‌ها در اثبات قضیه‌ی تیخونف و زیرپایه‌ی الکساندر راحت‌ترند.

نکته طنز

دنباله مثل اتوبوسی است که در ایستگاه‌های $1, 2, 3, \dots$ توقف می‌کند. تور مثل تاکسی است که مسیرش را خودش انتخاب می‌کند — ممکن است به ایستگاه‌های عجیب و غریبی سر بزند! پالایه مثل «سلیقه‌ی مسافر» است: می‌گوید «هر جا بروی، من هم آن جا هستم».

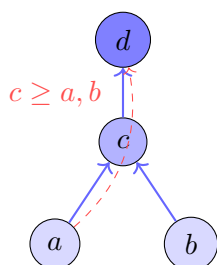
۴.۵ مجموعه‌های جهت‌دار و تورها

تعریف ۱.۵ (مجموعه‌ی جهت‌دار). مجموعه‌ی D با رابطه‌ی $\leq$ را یک مجموعه‌ی جهت‌دار می‌نامیم هرگاه:

(D۱) $\leq$ بازتابی است: $a \leq a$ برای هر $a \in D$.

(D۲) $\leq$ تعدی است: اگر $a \leq b$ و $b \leq c$ ، آنگاه $a \leq c$.

(D۳) خاصیت جهت‌دار بودن: برای هر $a, b \in D$ ، عضوی مانند $c \in D$ موجود است که $a \leq c$ و $b \leq c$.

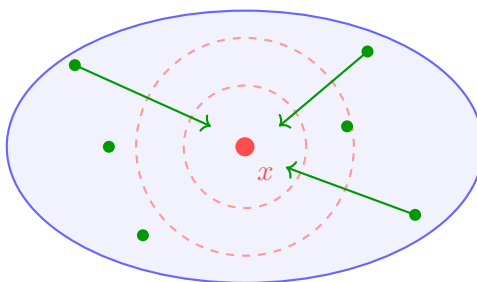


دارند بالا کران عنصر دو هر جهت‌دار: مجموعه

شکل ۱.۵: مجموعه جهت‌دار: هر دو عنصر، عنصر کران بالای مشترک دارند.

تعریف ۲.۵ (تور). فرض کن X مجموعه‌ای باشد. یک تور در X تابعی است مانند $x : D \rightarrow X$ که D یک مجموعه‌ی جهت‌دار است. معمولاً به جای $x(d)$ می‌نویسیم x_d و تور را با $\{x_d\}_{d \in D}$ یا (x_d) نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۵ (همگرایی تور). فرض کن (X, T) فضای توپولوژیک و $\{x_d\}_{d \in D}$ توری در X باشد. می‌گوییم تور به $x \in X$ همگرا است (یا x حد تور است) هرگاه برای هر همسایگی U از x ، عضوی مانند $d_0 \in D$ موجود باشد که برای هر $x_d \in U$ ، $d \geq d_0$ ، در این حالت می‌نویسیم $x_d \rightarrow x$.



x همسایگی هر در نهایتاً: $x_d \rightarrow x$

شکل ۲.۵: همگرایی تور: نهایتاً در هر همسایگی حد.

قضیه ۱.۵. فرض کن $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک و $A \subseteq X$. آنگاه $x \in \text{cl}(A)$ اگر و تنها اگر توری در A موجود باشد که به x همگرا شود.

اثبات. $(\Rightarrow)$: فرض کن $x \in \text{cl}(A)$. مجموعه‌ی $\mathcal{N}_x$ همه‌ی همسایگی‌های x را در نظر بگیر. این مجموعه با رابطه‌ی $U \preceq V \iff V \subseteq U$ یک مجموعه‌ی جهت‌دار است. برای هر $U \in \mathcal{N}_x$ ، چون $x \in \text{cl}(A)$ ، $U \cap A \neq \emptyset$. یک نقطه‌ی $x_U \in U \cap A$ انتخاب کن. تور $\{x_U\}_{U \in \mathcal{N}_x}$ در A است. نشان می‌دهیم به x همگرا است: برای هر همسایگی V از x ، اگر $U \succeq V$ (یعنی $U \subseteq V$)، آنگاه $x_U \in U \subseteq V$. پس $x_U \rightarrow x$.
 $(\Leftarrow)$: فرض کن توری $\{x_d\}_{d \in D}$ در A باشد که $x_d \rightarrow x$. برای هر همسایگی U از x ، عضوی d_0 موجود است که برای هر $d \geq d_0$ ، $x_d \in U$ ، چون $x_{d_0} \in U$ و $x_{d_0} \in A$ داریم $U \cap A \neq \emptyset$. پس $x \in \text{cl}(A)$. $\square$

قضیه ۲.۵. در فضای هاسدرف، حد هر تور (در صورت وجود) یکتاست.

اثبات. فرض کن تور $\{x_d\}$ به x و y همگرا باشد با $x \neq y$. چون X هاسدرف است، بازهای جدا U, V با $x \in U$ ، $y \in V$ موجودند. چون $x_d \rightarrow x$ ، عضوی d_1 موجود است که برای $d \geq d_1$ ، $x_d \in U$. چون $x_d \rightarrow y$ ، عضوی d_2 موجود است که برای $d \geq d_2$ ، $x_d \in V$. طبق خاصیت جهت‌دار بودن، $d_0 \geq d_1, d_2$ موجود است. آنگاه $x_{d_0} \in U \cap V$ ، که با $U \cap V = \emptyset$ در تناقض است. $\square$

قضیه ۳.۵. فضای توپولوژیک X فشرده است اگر و تنها اگر هر تور در X دارای زیرتوری همگرا باشد.

اثبات. $(\Rightarrow)$: فرض کن X فشرده و $\{x_d\}_{d \in D}$ توری در X . فرض خلف: تور زیرتوری همگرا ندارد. آنگاه هر $x \in X$ نقطه‌ی خوشه‌ای تور نیست. پس برای هر x ، همسایگی بازی U_x و اندیس d_x موجودند که برای همه‌ی $x_d \notin U_x$ ، $d \geq d_x$.

خانواده‌ی $\{U_x\}_{x \in X}$ پوشش باز از X است. طبق فشردگی، زیرپوشش متناهی $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$ موجود است. قرار بده $d_0 \geq d_{x_1}, \dots, d_{x_n}$ (ممکن است جهت‌دار بودن). برای $d \geq d_0$ ، $x_d \notin U_{x_i}$ برای هر i ، پس $x_d \notin \bigcup U_{x_i} = X$. تناقض.

$(\Leftarrow)$: فرض کن هر تور زیرتوری همگرا داشته باشد و X فشرده نباشد. پس پوشش باز $\{U_\alpha\}$ بدون زیرپوشش متناهی موجود است. مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های متناهی از اندیس‌ها را در نظر بگیر و برای هر زیرمجموعه‌ی متناهی F ، نقطه‌ای $x_F \notin \bigcup_{\alpha \in F} U_\alpha$ انتخاب کن. مجموعه‌ی زیرمجموعه‌های متناهی با شمول جهت‌دار است. تور $\{x_F\}$ را در نظر بگیر. اگر زیرتوری به x همگرا باشد، $x \in U_{\alpha_0}$ برای برخی α_0 . آنگاه نهایتاً $x_F \in U_{\alpha_0}$ اما برای $x_F \notin U_{\alpha_0}$ ، $F \supseteq \{\alpha_0\}$. تناقض. $\square$

۵.۵ پالایه‌ها

تعریف ۴.۵. (پالایه). فرض کن X مجموعه‌ای ناتهی باشد. خانواده‌ی $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ یک پالایه روی X است هرگاه:

$$(F1) \quad X \in \mathcal{F} \text{ و } \emptyset \notin \mathcal{F}$$

$$(F2) \quad \text{اگر } A, B \in \mathcal{F} \text{، آنگاه } A \cap B \in \mathcal{F} \text{ (بسته تحت اشتراک متناهی).}$$

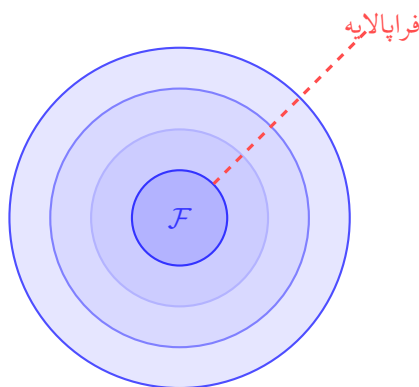
$$(F3) \quad \text{اگر } A \in \mathcal{F} \text{ و } A \subseteq B \text{، آنگاه } B \in \mathcal{F} \text{ (بسته تحت سوپرست).}$$

قضیه ۴.۵. (ساخت پالایه از یک خانواده). فرض کن $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ خانواده‌ای با خاصیت اشتراک متناهی (اشتراک هر زیرخانواده‌ی متناهی ناتهی است). آنگاه کوچک‌ترین پالایه شامل $\mathcal{A}$ وجود دارد و برابر است با:

$$\mathcal{F} = \{B \subseteq X : B \supseteq A_1 \cap \dots \cap A_n \text{ برای برخی } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}\}.$$

اثبات. خوش‌تعریف بودن: ابتدا نشان می‌دهیم $\mathcal{F}$ یک پالایه است.

$$(F1) \quad \emptyset \notin \mathcal{F} \text{ اگر } \emptyset \in \mathcal{F} \text{، آنگاه } \emptyset \in \mathcal{F} \text{، یعنی } A_1 \cap \dots \cap A_n \subseteq \emptyset \text{، که با خاصیت اشتراک متناهی در تناقض است. و } X \in \mathcal{F}.$$



سوپرست و متناهی اشتراک تحت بسته $\mathcal{F}$:

شکل ۳.۵: پالایه (حباب‌های تودرتو) و فراپالایه (ماکسیمال).

(F۲) اگر $B_2 \supseteq A'_1 \cap \dots \cap A'_m$ و $B_1 \supseteq A_1 \cap \dots \cap A_n$ ، آنگاه:

$$B_1 \cap B_2 \supseteq A_1 \cap \dots \cap A_n \cap A'_1 \cap \dots \cap A'_m.$$

پس $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F}$.

(F۳) اگر $B \in \mathcal{F}$ و $B \subseteq C$ ، آنگاه $C \supseteq B \supseteq A_1 \cap \dots \cap A_n$ ، پس $C \in \mathcal{F}$.

کوچک‌ترین بودن: هر پالایه‌ی $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{A}$ شامل همه‌ی اشتراک‌های متناهی اعضای $\mathcal{A}$ است (خاصیت F۲) و شامل سوپرست‌های آن‌ها (خاصیت F۳). پس $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$. □

قضیه ۵.۵ (پایه‌ی پالایه). فرض کن $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ناتهی باشد. $\mathcal{B}$ پایه‌ی یک پالایه است اگر و تنها اگر:

$$(B1) \quad \emptyset \notin \mathcal{B}$$

(B۲) برای هر $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ، عضوی مانند $B_3 \in \mathcal{B}$ موجود باشد که $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

اثبات. $(\Rightarrow)$: اگر $\mathcal{B}$ پایه‌ی پالایه‌ی $\mathcal{F}$ باشد، $\emptyset \notin \mathcal{B}$ (چون $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$). و برای $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ، $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F}$ ، چون $\mathcal{B}$ پایه است، $B_3 \in \mathcal{B}$ با $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ موجود است. $(\Leftarrow)$: فرض کن $\mathcal{B}$ شرایط را داشته باشد. تعریف کن:

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq X : A \supseteq B \text{ برای برخی } B \in \mathcal{B}\}.$$

نشان می‌دهیم $\mathcal{F}$ یک پالایه است:

$$\bullet \quad \emptyset \notin \mathcal{F}$$

$$\bullet \quad X \in \mathcal{F}$$

• $A_1 \cap A_2 \supseteq B_1 \cap B_2 \supseteq B_3$ موجود. طبق (B۲)، $A_2 \supseteq B_2, A_1 \supseteq B_1 : A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ ، پس $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$.

• سوپرست: بدیهی.

□

تعریف ۵.۵ (پالایه‌ی همسایگی). فرض کن $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک و $x \in X$. پالایه‌ی همسایگی‌های x عبارت است از:

$$\mathcal{N}_x = \{N \subseteq X : N \text{ همسایگی } x\}.$$

تعریف ۶.۵ (همگرایی پالایه). فرض کن $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک و $\mathcal{F}$ پالایه‌ای روی X . می‌گوییم $\mathcal{F}$ به x همگرا است و می‌نویسیم $x \rightarrow \mathcal{F}$ ، هرگاه $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{N}_x$ (یعنی هر همسایگی x عضوی از $\mathcal{F}$ باشد).

قضیه ۶.۵. فرض کن $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک و $A \subseteq X$. آنگاه $x \in \text{cl}(A)$ اگر و تنها اگر پالایه‌ای روی A موجود باشد که به x همگرا شود.

اثبات. $(\Rightarrow)$: فرض کن $x \in \text{cl}(A)$. خانواده‌ی $\mathcal{B} = \{U \cap A : U \in \mathcal{N}_x\}$ را در نظر بگیر. این خانواده شرایط پایه‌ی پالایه را دارد. پالایه‌ی تولیدشده توسط $\mathcal{B}$ روی A متمرکز است و به x همگرا می‌شود.
 $(\Leftarrow)$: فرض کن $\mathcal{F}$ پالایه‌ای روی A با $x \rightarrow \mathcal{F}$. برای هر همسایگی U از x ، $U \in \mathcal{F}$. چون $\mathcal{F}$ روی A متمرکز است، $U \cap A \neq \emptyset$. پس $x \in \text{cl}(A)$. $\square$

تعریف ۷.۵ (فراپالایه). پالایه‌ی $\mathcal{F}$ روی X یک **فراپالایه** (اولترافیلتر) است هرگاه هیچ پالایه‌ی بزرگ‌تری روی X وجود نداشته باشد.

لم ۷.۵ (لم فراپالایه). هر پالایه در یک فراپالایه قرار می‌گیرد.

اثبات. فرض کن $\mathcal{F}_0$ پالایه‌ای روی X باشد. مجموعه‌ی $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ همه‌ی پالایه‌های روی X شامل $\mathcal{F}_0$ را در نظر بگیر. این مجموعه با شمول $\subseteq$ مرتب جزئی است. هر زنجیر $\{\mathcal{F}_\alpha\}$ در $\mathcal{F}$ کراندار بالایی دارد: قرار بده $\mathcal{F}^* = \bigcup_\alpha \mathcal{F}_\alpha$. نشان می‌دهیم $\mathcal{F}^*$ یک پالایه است. طبق لم تسورن، $\mathcal{F}^*$ عضوی ماکسیمال دارد که همان فراپالایه است. $\square$

قضیه ۸.۵ (مشخصه‌ی فراپالایه). پالایه‌ی $\mathcal{F}$ روی X فراپالایه است اگر و تنها اگر برای هر $A \subseteq X$ ، دقیقاً یکی از A یا $X \setminus A$ در $\mathcal{F}$ باشد.

اثبات. $(\Rightarrow)$: فرض کن $\mathcal{F}$ فراپالایه و $A \subseteq X$. نمی‌تواند هر دو A و $X \setminus A$ در $\mathcal{F}$ باشند، چون آنگاه $A \cap (X \setminus A) = \emptyset \in \mathcal{F}$ ، تناقض.
 فرض خلف: هیچ‌کدام در $\mathcal{F}$ نیستند. خانواده‌ی $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \{A\}$ را در نظر بگیر و پالایه‌ی $\mathcal{G}$ تولیدشده توسط آن را بساز. هر عضو G شامل $F \cap A$ برای برخی $F \in \mathcal{F}$ است. اگر $F \cap A = \emptyset$ ، آنگاه $F \subseteq X \setminus A$ ، پس $X \setminus A \in \mathcal{F}$ (سوپرست)، تناقض. پس $\mathcal{G}$ یک پالایه‌ی اکیداً بزرگ‌تر است، که با فراپالایه بودن $\mathcal{F}$ در تناقض است.
 $(\Leftarrow)$: فرض کن برای هر A ، دقیقاً یکی از A یا $X \setminus A$ در $\mathcal{F}$ باشد. اگر $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ پالایه‌ای بزرگ‌تر باشد، عضوی $B \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$ موجود است. چون $B \notin \mathcal{F}$ ، باید $X \setminus B \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. پس $B \cap (X \setminus B) = \emptyset \in \mathcal{G}$ ، تناقض. پس $\mathcal{G} = \mathcal{F}$. $\square$

نتیجه ۱.۵. اگر $\mathcal{F}$ فراپالایه‌ای روی X باشد و x نقطه‌ی خوشه‌ای $\mathcal{F}$ ، آنگاه $x \rightarrow \mathcal{F}$.

۶.۵ رابطه‌ی تورها و پالایه‌ها

قضیه ۹.۵. هر تور یک پالایه تولید می‌کند و هر پالایه یک تور تولید می‌کند، به‌طوری که همگرایی حفظ می‌شود.

اثبات. **تور $\rightarrow$ پالایه:** فرض کن $\{x_d\}_{d \in D}$ توری در X باشد. خانواده‌ی:

$$\mathcal{B} = \{B_d : d \in D\}, \quad B_d = \{x_{d'} : d' \geq d\}.$$

این خانواده شرایط پایه‌ی پالایه را دارد. پالایه‌ی تولیدشده را $\mathcal{F}$ بنام. اگر $x_d \rightarrow x$ ، آنگاه هر همسایگی U از x شامل B_{d_0} برای برخی d_0 است، پس $U \in \mathcal{F}$ ، یعنی $x \rightarrow \mathcal{F}$.

پالایه $\rightarrow$ تور: فرض کن $\mathcal{F}$ پالایه‌ای روی X باشد. مجموعه‌ی $D = \{(a, A) : a \in A \in \mathcal{F}\}$ را با رابطه‌ی $(a, A) \preceq (b, B) \iff B \subseteq A$ در نظر بگیر. این مجموعه جهت‌دار است. تعریف کن $x_{(a,A)} = a$. اگر $\mathcal{F} \rightarrow x$ ، برای هر همسایگی U از x ، $U \in \mathcal{F}$. آنگاه $(a, U) \in D$ برای هر $a \in U$. برای هر $(b, B) \succeq (a, U)$ ، $B \subseteq U$ ، پس $x_{(b,B)} = b \in B \subseteq U$. پس تور به x همگرا است. $\square$

۷.۵ قضیه‌ی زیرپایه‌ی الکساندر

قضیه ۱۰.۵ (زیرپایه‌ی الکساندر). فرض کن X فضای توپولوژیک با زیرپایه‌ی $\mathcal{S}$ باشد. اگر هر پوشش باز از X با اعضای $\mathcal{S}$ دارای زیرپوشش متناهی باشد، آنگاه X فشرده است.

اثبات. فرض خلف: X فشرده نباشد. طبق قضیه ۱۰.۳، خانواده‌ای از مجموعه‌های بسته با خاصیت اشتراک متناهی وجود دارد که اشتراک کل تهی است. این خانواده، پالایه‌ای تولید می‌کند که نقطه‌ی خوشه‌ای ندارد. طبق لم فرایالایه (۷.۵)، فرایالایه‌ی $\mathcal{F} \supseteq$ این پالایه موجود است. اگر X فشرده نباشد، $\mathcal{F}$ هیچ نقطه‌ی حدی ندارد، پس برای هر

$x \in X$ ، عضوی $F_x \in \mathcal{F}$ و همسایگی بازی U_x از x موجودند که $F_x \cap U_x = \emptyset$. خانواده‌ی $\{U_x\}_{x \in X}$ پوشش باز از X است. هر U_x را می‌توان به صورت اجتماع متناهی از اشتراک‌های متناهی اعضای زیرپایه $\mathcal{S}$ نوشت (چون $\mathcal{S}$ زیرپایه است). چون U_x شامل x است، عضوی از این اشتراک‌ها شامل x است. طبق فرض قضیه، چون هر پوشش باز از X با اعضای $\mathcal{S}$ زیرپوشش متناهی دارد، پس X با اعضای پایه‌ای نیز زیرپوشش متناهی دارد. به‌ویژه، از پوشش $\{U_x\}$ ، زیرپوشش متناهی $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$ موجود است. حال $F = F_{x_1} \cap \dots \cap F_{x_n} \in \mathcal{F}$ (چون $\mathcal{F}$ فرایالایه است و بسته تحت اشتراک متناهی). اما:

$$F \cap U_{x_i} = \emptyset \implies F \cap \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} = \emptyset \implies F \cap X = \emptyset \implies F = \emptyset.$$

□

که با $\emptyset \notin \mathcal{F}$ در تناقض است. پس X فشرده است.

۸.۵ قضیه‌ی تیخونف

قضیه ۱۱.۵ (تیخونف). حاصل ضرب دلخواه فضاهای فشرده، فشرده است.

اثبات. فرض کن $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ خانواده‌ای از فضاهای فشرده و $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ با توپولوژی حاصل ضربی. نشان می‌دهیم X فشرده است.

اثبات با پالایه:

فرض کن $\mathcal{F}$ فرایالایه‌ای روی $X = \prod X_\alpha$ باشد. برای هر α ، تصویر:

$$\pi_\alpha(\mathcal{F}) = \{A \subseteq X_\alpha : \pi_\alpha^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$$

یک فرایالایه روی X_α است. چون X_α فشرده است، $\pi_\alpha(\mathcal{F})$ به نقطه‌ای مانند x_α همگرا می‌شود (نتیجه ۱.۵). قرار بده $x = (x_\alpha)$.

نشان می‌دهیم $x \in \mathcal{F}$: برای هر عضو پایه‌ای $B = \bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ شامل x ، داریم $U_{\alpha_i} \in \pi_{\alpha_i}(\mathcal{F})$ (چون $\pi_{\alpha_i}(\mathcal{F}) \rightarrow x_{\alpha_i}$). پس $\pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \in \mathcal{F}$ برای هر i . چون $\mathcal{F}$ بسته تحت اشتراک متناهی است، $B \in \mathcal{F}$. پس $\mathcal{F}$ شامل همه‌ی اعضای پایه‌ای شامل x است، و بنابراین $x \in \mathcal{F}$.

□

بنابراین هر فرایالایه روی X همگرا است، یعنی X فشرده است.

نتیجه ۲.۵. $[0, 1]^I$ برای هر مجموعه‌ی I فشرده است.

نتیجه ۳.۵. فضای کانتور $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ فشرده است.

۹.۵ مثال‌های حل شده

مثال ۱.۵ (همگرایی تور در $\mathbb{R}$). تور $x_n = 1/n$ با $D = \mathbb{N}$ به ۰ همگرا است.

مثال ۲.۵ (پالایه‌ی همسایگی در $\mathbb{R}$). برای $x = 0$ ، $\mathcal{N}_0$ شامل همه‌ی مجموعه‌های حاوی بازه‌ی $(-\epsilon, \epsilon)$ است. پالایه‌ی $\mathcal{N}_0$ به ۰ همگرا است.

مثال ۳.۵ (فرایالایه روی $\mathbb{N}$). برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، خانواده‌ی $\mathcal{F}_n = \{A \subseteq \mathbb{N} : n \in A\}$ یک فرایالایه است (فرایالایه اصلی).

۱۰.۵ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

«هر تور یک دنباله است.» اصلاح: دنباله توری با مجموعه‌ی جهت‌دار $\mathbb{N}$ است. عکس آن درست نیست.

اشتباه رایج

«در فضای هاسدرف، هر پالایه حداکثر یک حد دارد.» اصلاح: این درست است، اما توجه کن که پالایه ممکن است همگرا نباشد یا چند نقطه‌ی خوشه‌ای داشته باشد.

اشتباه رایج

«هر پالایه در یک فراپالایه یکتا قرار می‌گیرد.» اصلاح: لزوماً یکتا نیست. یک پالایه می‌تواند در چند فراپالایه قرار گیرد.

اشتباه رایج

«قضیه‌ی تیخونف فقط برای حاصل ضرب متناهی برقرار است.» اصلاح: تیخونف برای حاصل ضرب دلخواه برقرار است.

۱۱.۵ تمرین‌ها

تمرین ۱.۵. نشان بده هر دنباله یک تور است.

تمرین ۲.۵. نشان بده پالایه‌ی همسایگی‌های یک نقطه، پالایه است.

تمرین ۳.۵. نشان بده تور در فضای هاسدرف حداکثر یک حد دارد.

تمرین ۴.۵. فراپالایه‌ی اصلی روی X را تعریف کن و نشان بده فراپالایه است.

تمرین ۵.۵. قضیه‌ی تیخونف را برای $[0, 1]^2$ با استفاده از زیرپایه‌ی الکساندر بررسی کن.

تمرین ۶.۵. نشان بده در فضای فشرد، هر پالایه نقطه‌ی خوشه‌ای دارد.

تمرین ۷.۵. نشان بده اگر هر فراپالایه روی X همگرا باشد، آنگاه X فشرده است.

تمرین ۸.۵. زیرپایه‌ی الکساندر را برای $\mathbb{R}$ با توپولوژی معمول بررسی کن.

تمرین ۹.۵. نشان بده تور $\{x_d\}$ به x همگرا است اگر و تنها اگر پالایه‌ی تولیدشده توسط آن به x همگرا باشد.

تمرین ۱۰.۵. نشان بده اگر X فشرده و Y هاسدرف باشد، هر تابع پیوسته و یک‌به‌یک $f: X \rightarrow Y$ همسان‌ریختی است.

۱۲.۵ خلاصه فصل

- مجموعه‌ی جهت‌دار: بازتابی، تعدی، با خاصیت جهت‌دار بودن.
- تور: تعمیم دنباله با مجموعه‌ی جهت‌دار دلخواه.
- همگرایی تور: نهایتاً در هر همسایگی حد.
- پالایه: خانواده‌ی بسته تحت اشتراک متناهی و سوپرست، شامل X ، بدون $\emptyset$.
- پالایه‌ی همسایگی: $\mathcal{N}_x$ ، پالایه‌ی طبیعی یک نقطه.
- همگرایی پالایه: $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{N}_x$.
- فراپالایه: پالایه‌ی ماکسیمال. هر پالایه در یک فراپالایه قرار می‌گیرد (لم فراپالایه).
- مشخصه‌ی فراپالایه: برای هر A ، دقیقاً یکی از A یا $X \setminus A$ در فراپالایه است.
- زیرپایه‌ی الکساندر: اگر هر پوشش باز با اعضای زیرپایه، زیرپوشش متناهی داشته باشد، فضا فشرده است.
- قضیه‌ی تیخونف: حاصل ضرب دلخواه فضاهای فشرده، فشرده است.
- رابطه‌ی تور و پالایه: هر تور یک پالایه تولید می‌کند و برعکس، با حفظ همگرایی.

۱۳.۵ ارجاع به منابع

مانکرز فصل ۳ (بخش ۲۶ برای الکساندر)؛ ویلارد فصل ۴ (بخش ۱۱ و ۱۲)، فصل ۵ (بخش ۱۷ برای تیخونف)؛ بورباکی فصل ۱ (بخش ۶ و ۷)؛ هو فصل ۳.

فصل ۶

توپولوژی فضاهای متریک

۱.۶ هدف یادگیری

پس از مطالعه این فصل، دانشجو باید بتواند:

۱. فضای متریک را تعریف کند و توپولوژی متریک را بسازد.
۲. هم‌ارزی مترها را تعریف کند و معیارهای آن را بیان کند.
۳. قضیه‌ی متریک‌پذیری اورایسون را با اثبات کامل ارائه دهد.
۴. لم بسته‌ی محلی متناهی را اثبات کند.
۵. قضیه‌ی ناگاتا-اسمیرنوف را بیان کند (اختیاری).
۶. خم فضا پرکن (خم پیانو) را بسازد و پوشا بودن آن را تحلیل کند.
۷. رابطه‌ی بین فضاهای متریک‌پذیر و اصول جداسازی را بفهمد.

۲.۶ پیش‌نیاز

فصل‌های ۱ تا ۵ (توپولوژی، پیوستگی، فشردگی، اصول جداسازی، پالایه‌ها و تورها)؛ آشنایی مقدماتی با سری‌ها و توابع پیوسته‌ی حقیقی.

۳.۶ شهود روزمره

شهود

فضای متریک، فضایی است که در آن «فاصله» داریم. سؤال اصلی این فصل این است: چه فضاهای توپولوژیکی از یک متر می‌آیند؟ به این ویژگی، متریک‌پذیری می‌گویند. قضیه‌ی اورایسون شرط لازم و کافی (تقریباً) برای متریک‌پذیری می‌دهد: منظم + شمارای نوع دوم. خم فضا پرکن نشان می‌دهد که شهود ما درباره‌ی «بعد» می‌تواند گمراه‌کننده باشد: یک خم یک‌بعدی می‌تواند یک مربع دوبعدی را پر کند!

نکته طنز

فضای متریک مثل زمین بازی است که خطکش دارد. فضای توپولوژیک عمومی مثل زمین بازی است که فقط می‌داند چه کسی «نزدیک» چه کسی است، بدون اندازه‌گیری فاصله. قضیه‌ی اورایسون می‌گوید: اگر زمین بازی‌ات به قدر کافی «مرتب» باشد، می‌توانی یک خطکش اختراع کنی!

۴.۶ فضاهای متریک و توپولوژی متریک

تعریف ۱.۶ (متر). فرض کن X مجموعه‌ای ناتهی باشد. تابع $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ را یک متر روی X می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y, z \in X$:

$$(M1) \quad d(x, y) \geq 0 \text{ (نامنفی).}$$

$$(M2) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y \text{ (تعریف‌پذیری).}$$

$$(M3) \quad d(x, y) = d(y, x) \text{ (تقارن).}$$

$$(M4) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ (نامساوی مثلث).}$$

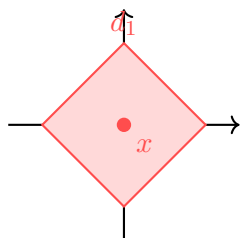
در این حالت (X, d) یک فضای متریک است.

تعریف ۲.۶ (گوی باز). فرض کن (X, d) فضای متریک، $x \in X$ و $r > 0$. گوی باز به مرکز x و شعاع r :

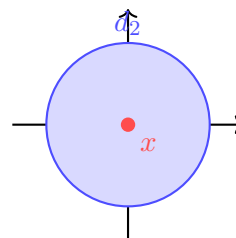
$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

گوی بسته:

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}.$$



(ب) منهتن



(آ) اقلیدسی

شکل ۱.۶: گوی باز در متر اقلیدسی (دایره) و منهتن (لوزی) — هم‌ارز توپولوژیک.

قضیه ۱.۶ (توپولوژی متریک). فرض کن (X, d) فضای متریک. خانواده‌ی:

$$\mathcal{T}_d = \{U \subseteq X : \forall x \in U, \exists r > 0, B(x, r) \subseteq U\}$$

یک توپولوژی روی X است که توپولوژی متریک نامیده می‌شود.

اثبات. بررسی اصول توپولوژی:

$$(T1) \quad \emptyset \in \mathcal{T}_d \text{ (شرط به طور خلاً برقرار است). } X \in \mathcal{T}_d \text{ : برای هر } x \in X, B(x, 1) \subseteq X.$$

$$(T2) \text{ فرض کن } \{U_\alpha\} \subseteq \mathcal{T}_d \text{ و } U = \bigcup_\alpha U_\alpha. \text{ برای } x \in U, \text{ عضوی } \alpha_0 \text{ با } x \in U_{\alpha_0} \text{ موجود است. چون } B(x, r) \subseteq U_{\alpha_0} \subseteq U \text{ با } r > 0, U_{\alpha_0} \in \mathcal{T}_d \text{ پس } U \in \mathcal{T}_d.$$

(T۳) فرض کن $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$ و $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}_d$. برای $x \in U$ ، برای هر i ، $r_i > 0$ با $B(x, r_i) \subseteq U_i$ موجود است. قرار بده $r = \min(r_1, \dots, r_n) > 0$. آنگاه $B(x, r) \subseteq B(x, r_i) \subseteq U_i$ برای هر i ، پس $B(x, r) \subseteq U$. بنابراین $U \in \mathcal{T}_d$.

□

قضیه ۲.۶. در فضای متریک (X, d) ، خانواده‌ی همه‌ی گوی‌های باز یک پایه برای $\mathcal{T}_d$ است.

اثبات. بررسی شرایط قضیه ۸.۱:

$$\bigcup_{x \in X} B(x, 1) = X \quad (\mathbf{B1}):$$

(B۲): اگر $z \in B(x, r_1) \cap B(y, r_2)$ ، قرار بده $r = \min(r_1 - d(x, z), r_2 - d(y, z)) > 0$. نشان می‌دهیم $B(z, r) \subseteq B(x, r_1) \cap B(y, r_2)$ برای $w \in B(z, r)$:

$$d(x, w) \leq d(x, z) + d(z, w) < d(x, z) + r_1 - d(x, z) = r_1.$$

□

پس $w \in B(x, r_1)$ مشابه $w \in B(y, r_2)$.

۵.۶ هم‌ارزی مترها

تعریف ۳.۶ (هم‌ارزی توپولوژیک). دو متر d_1 و d_2 روی X هم‌ارز توپولوژیک هستند هرگاه $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$.

تعریف ۴.۶ (هم‌ارزی یکنواخت). دو متر d_1 و d_2 روی X هم‌ارز یکنواخت هستند هرگاه اعداد $\alpha, \beta > 0$ موجود باشند که برای هر $x, y \in X$:

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y).$$

قضیه ۳.۶. هم‌ارزی یکنواخت $\Rightarrow$ هم‌ارزی توپولوژیک.

اثبات. فرض کن $\alpha d_1 \leq d_2 \leq \beta d_1$ با $\alpha, \beta > 0$. برای $x \in X$ و $r > 0$:

$$B_{d_1}(x, r/\beta) \subseteq B_{d_2}(x, r) \subseteq B_{d_1}(x, r/\alpha).$$

□

پس هر گوی باز در یک متر، شامل یک گوی باز در متر دیگر است. بنابراین دو توپولوژی یکسان‌اند.

قضیه ۴.۶. اگر d یک متر روی X باشد، آنگاه:

$$\rho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

یک متر کراندار روی X است که با d هم‌ارز توپولوژیک است.

اثبات. متر بودن: (M۳)–(M۱) واضح. برای (M۴) تابع $f(t) = t/(1+t)$ صعودی و زیرجمعی است.

□

هم‌ارزی: نشان می‌دهیم گوی‌های باز در دو متر، شامل یکدیگرند.

۶.۶ فضاهای متریک‌پذیر

تعریف ۵.۶ (متریک‌پذیری). فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ متریک‌پذیر است هرگاه متری مانند d روی X موجود باشد که $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$.

قضیه ۵.۶. هر فضای متریک‌پذیر:

۱. T_4 (نرمال و T_1) است.

۲. شمارای نوع اول است.

۳. هر زیرفضای آن متریک پذیر است.

۴. حاصل ضرب شمارای آن متریک پذیر است.

اثبات. ۱. قضیه ۶.۴ نشان می دهد متریک $\Rightarrow$ نرمال. و T_1 از (M۲) نتیجه می شود.

۲. برای هر x ، خانواده $\{B(x, 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$ پایه ی همسایگی شمارا است.

۳. اگر $A \subseteq X$ و d متر روی X ، محدودیت $d|_A$ متر روی A است و توپولوژی زیرفضا را تولید می کند.

۴. اگر d_i متر روی X_i باشد، $d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{d_i(x_i, y_i)}{1+d_i(x_i, y_i)}$ متر روی $\prod X_i$ است.

□

قضیه ۶.۶ (قضیه ی متریک پذیری اورایسون). هر فضای توپولوژیک منظم با پایه ی شمارا (یعنی T_3 و شمارای نوع دوم)، متریک پذیر است.

اثبات. طرح اثبات: فضای X را در یک زیرفضای از $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ نشانده می کنیم.

گام ۱: پایه ی شمارا. چون X شمارای نوع دوم است، پایه ی شمارای $B = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ دارد.

گام ۲: انتخاب جفت های «خوب». برای هر جفت $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ که $\text{cl}(B_n) \subseteq B_m$ ، تابع پیوسته ی $f_{n,m} : X \rightarrow [0, 1]$ با:

$$f_{n,m}|_{\text{cl}(B_n)} = 1, \quad f_{n,m}|_{X \setminus B_m} = 0$$

می سازیم. این از لم اورایسون (۸.۴) نتیجه می شود.

گام ۳: تعریف نشانده. تعریف کن:

$$F : X \rightarrow [0, 1]^{\mathbb{N}}, \quad F(x) = \left(\frac{f_{n_k, m_k}(x)}{k} \right)_{k \in \mathbb{N}}.$$

گام ۴: F پیوسته و یک به یک است. پیوستگی از خاصیت جهانی حاصل ضرب. یک به یک بودن با استفاده از منظم بودن و پایه.

گام ۵: F نشانده است. با نشان دادن باز بودن F روی تصویر.

گام ۶: نتیجه. F یک نشانده از X به $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ است. فضای $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ متریک پذیر است. زیرفضای $F(X)$ متریک پذیر است. و X همسان ریخت با $F(X)$ است، پس متریک پذیر است.

□

قضیه ۷.۶ (قضیه ی ناگاتا-اسمیرنوف). فضای توپولوژیک X متریک پذیر است اگر و تنها اگر منظم و T_1 باشد و پایه ای σ -موضعی متناهی داشته باشد.

اثبات. (اختیاری) اثبات از قضیه ی اورایسون با جایگزینی «شمارای نوع دوم» با « σ -موضعی متناهی» و استفاده از لم بسته ی محلی متناهی (لم زیر) به دست می آید.

□

لم ۸.۶ (لم بسته ی محلی متناهی). فرض کن $\mathcal{F}$ خانواده ای موضعی متناهی از مجموعه های بسته در X باشد. آنگاه $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$ بسته است.

اثبات. «موضعی متناهی» یعنی هر نقطه ی $x \in X$ همسایگی بازی دارد که با متناهی عضو از $\mathcal{F}$ اشتراک دارد. فرض کن $x \in \text{cl}(\bigcup \mathcal{F})$. باید نشان دهیم $x \in \bigcup \mathcal{F}$. همسایگی باز U از x با اشتراک متناهی با $\mathcal{F}$ موجود است: $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$ فقط برای $U \cap F \neq \emptyset$.

نشان می دهیم $x \in F_1 \cup \dots \cup F_n$. فرض خلف: $x \notin F_i$ برای هر i . چون F_i بسته است، همسایگی باز V_i از x با $V_i \cap F_i = \emptyset$ موجود است. قرار بده $W = U \cap V_1 \cap \dots \cap V_n$ که باز و شامل x است. برای هر $F \in \mathcal{F}$:

• اگر $F = F_i$ ، $W \cap F \subseteq V_i \cap F_i = \emptyset$.

• اگر $F \notin \{F_1, \dots, F_n\}$ ، $U \cap F = \emptyset$ پس $W \cap F = \emptyset$.

پس $W \cap \bigcup \mathcal{F} = \emptyset$ که با $x \in \text{cl}(\bigcup \mathcal{F})$ در تناقض است.

□

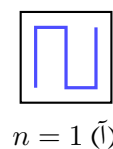
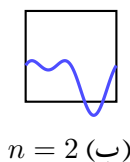
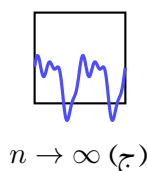
۷.۶ خم فضا پرکن

قضیه ۹.۶ (وجود خم فضا پرکن). یک تابع پیوسته‌ی پوشا از $[0, 1]$ به $[0, 1]^2$ وجود دارد.

اثبات. گام ۱: ساخت تقریب‌ها. برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، یک خم چندضلعی $\gamma_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ می‌سازیم که هر مربع از شبکه‌ی $2^n \times 2^n$ را حداقل یک بار ملاقات کند.
گام ۲: همگرایی یکنواخت. خم‌های γ_n را طوری بساز که:

$$\sup_{t \in [0, 1]} |\gamma_{n+1}(t) - \gamma_n(t)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2^n}.$$

سری $\sum_n \frac{\sqrt{2}}{2^n}$ همگرا است. پس دنباله‌ی $\{\gamma_n\}$ یک دنباله‌ی کوشی یکنواخت در فضای کامل $C([0, 1], \mathbb{R}^2)$ است. حد یکنواخت $\gamma = \lim_n \gamma_n$ موجود و پیوسته است.
گام ۳: پوشاست. برای هر $y \in [0, 1]^2$ و $\epsilon > 0$ ، نقطه‌ای مانند $t \in [0, 1]$ با $|\gamma(t) - y| < \epsilon$ موجود است. $\square$



شکل ۲.۶: خم فضا پرکن پیانو: تقریب مرحله‌ای برای پر کردن مربع.

قضیه ۱۰.۶. هیچ همسان‌ریختی بین $[0, 1]$ و $[0, 1]^2$ وجود ندارد.

اثبات. فرض خلف: $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ همسان‌ریختی. نقطه‌ی $p = f(1/2)$ را در نظر بگیر. مجموعه‌ی $[0, 1]^2 \setminus \{p\}$ ناهمبند است. پس $[0, 1] \setminus \{1/2\} = [0, 1/2) \cup (1/2, 1]$ نیز باید ناهمبند باشد. اما $[0, 1]^2 \setminus \{p\}$ متناقص است. $\square$

۸.۶ مثال‌های حل شده

مثال ۱۰.۶ (متریک‌پذیری $\mathbb{R}$). $\mathbb{R}$ منظم، T_1 و شمارای نوع دوم است. طبق قضیه‌ی اورایسون، متریک‌پذیر است. متر اقلیدسی سازگار است.

مثال ۲.۶ (فضای سورگنفری متریک‌پذیر نیست). صفحه‌ی سورگنفری نرمال نیست، پس متریک‌پذیر نیست.

۹.۶ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

«هر فضای نرمال، متریک‌پذیر است.» اصلاح: فضاهای نرمال غیرمتریک‌پذیر وجود دارند.

اشتباه رایج

«هر فضای متریک‌پذیر، شمارای نوع دوم است.» اصلاح: $\mathbb{R}$ با متر گسسته متریک‌پذیر است اما شمارای نوع دوم نیست.

اشتباه رایج

«خم فضا پرکن یک همسان‌ریختی است.» اصلاح: خم فضا پرکن پیوسته و پوشاست اما یک‌به‌یک نیست.

۱۰.۶ تمرین‌ها

- تمرین ۱.۶. نشان بده هر زیرفضای فضای متریک، متریک‌پذیر است.
- تمرین ۲.۶. نشان بده $\mathbb{R}^n$ متریک‌پذیر است.
- تمرین ۳.۶. نشان بده متر گسسته، توپولوژی گسسته را تولید می‌کند.
- تمرین ۴.۶. آیا فضای پادگسسته با بیش از یک نقطه متریک‌پذیر است؟
- تمرین ۵.۶. نشان بده در فضای متریک، $x \in \text{cl}(A)$ اگر و تنها اگر دنباله‌ای در A به x همگرا باشد.
- تمرین ۶.۶. نشان بده حاصل ضرب شمارای فضاهای متریک‌پذیر، متریک‌پذیر است.
- تمرین ۷.۶. نشان بده هر فضای متریک فشرده، کامل است.
- تمرین ۸.۶. نشان بده خم فضا پرکن نمی‌تواند یک‌به‌یک باشد.
- تمرین ۹.۶. نشان بده لم بسته‌ی محلی متناهی.
- تمرین ۱۰.۶. آیا $[0, 1]^{\mathbb{R}}$ متریک‌پذیر است؟
- تمرین ۱۱.۶. نشان بده هر فضای متریک‌پذیر، شمارای نوع اول است.

۱۱.۶ خلاصه فصل

- متر: تابع فاصله با چهار خاصیت.
- توپولوژی متریک: تولیدشده توسط گوی‌های باز.
- هم‌ارزی یکنواخت: $\alpha d_1 \leq d_2 \leq \beta d_1 \Rightarrow$ هم‌ارزی توپولوژیک.
- هر متر با یک متر کراندار هم‌ارز است.
- متریک‌پذیری: وجود متر سازگار.
- فضاهای متریک‌پذیر: نرمال، شمارای نوع اول.
- قضیه‌ی اورایسون: منظم + T_1 + شمارای نوع دوم $\Rightarrow$ متریک‌پذیر.
- قضیه‌ی ناگاتا-اسمیرنوف: منظم + T_1 + پایه‌ی σ -موضعیاً متناهی $\Leftrightarrow$ متریک‌پذیر.
- خم فضا پرکن: تابع پیوسته‌ی پوشا از $[0, 1]$ به $[0, 1]^2$.
- هیچ همسان‌ریختی بین $[0, 1]$ و $[0, 1]^2$ وجود ندارد.

۱۲.۶ ارجاع به منابع

مانکرز فصل ۶؛ ویلارد فصل ۶؛ بورباکی فصل ۹؛ هو فصل ۵.

فصل ۷

گروه‌های توپولوژیک

۱.۷ هدف یادگیری

پس از مطالعه‌ی این فصل، دانشجو باید بتواند:

۱. گروه توپولوژیک را تعریف کند و مثال‌های متعدد بیاورد.
۲. زیرگروه، زیرگروه بسته، و گروه خارج‌قسمتی را تحلیل کند.
۳. عمل گروه توپولوژیک بر فضای توپولوژیک و فضای همگن را تعریف کند.
۴. قضیه‌ی بیرکف را بیان و اثبات کند.
۵. قضیه‌ی کاکوتائی درباره‌ی متریک‌پذیری گروه‌های توپولوژیک فشرده را اثبات کند.
۶. روش‌های توپولوژیک ماتریسی و گروه‌های کلاسیک را بشناسد.
۷. ارتباط گروه‌های توپولوژیک با توپولوژی جبری و آنالیز هارمونیک را بفهمد.

۲.۷ پیش‌نیاز

فصل‌های ۱ تا ۶ (توپولوژی، پیوستگی، فشردگی، اصول جداسازی، پالایه‌ها، فضاها، متریک)؛ آشنایی مقدماتی با جبر مجرد (گروه، زیرگروه، گروه خارج‌قسمتی، هم‌ریختی).

۳.۷ شهود روزمره

شهود

گروه توپولوژیک، ترکیب دو ساختار است: یک ساختار جبری (گروه) و یک ساختار توپولوژیک (فضای توپولوژیک)، به‌طوری که این دو با هم «سازگار» باشند. یعنی عمل‌های گروهی (ضرب و معکوس) پیوسته باشند. مثال ساده: $(\mathbb{R}, +)$ با توپولوژی معمول. این ساختارها در آنالیز هارمونیک، نظریه‌ی نمایش، و فیزیک نظری بنیادی هستند.

نکته طنز

گروه توپولوژیک مثل یک رقصنده است: هم حرکات جبری زیبا دارد (گروه)، هم در فضای توپولوژیک نرم و پیوسته حرکت می‌کند. اگر فقط یکی از این دو را داشته باشد، رقصنده‌ی کاملی نیست!

۴.۷ گروه‌های توپولوژیک: تعریف و مثال‌ها

تعریف ۱.۷ (گروه توپولوژیک). فرض کن G مجموعه‌ای باشد که هم‌زمان دو ساختار دارد:

(G) ساختار گروه: $(G, \cdot, e)$ با عمل دوتایی $\cdot$ ، عنصر همانی e ، و معکوس g^{-1} .

(T) ساختار توپولوژیک: (G, T) .

می‌گوییم G یک گروه توپولوژیک است هرگاه این دو ساختار سازگار باشند، یعنی:

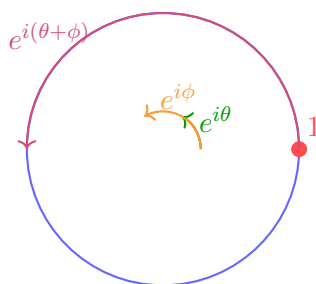
(C۱) تابع ضرب $m : G \times G \rightarrow G$ با $m(g, h) = gh$ پیوسته باشد.

(C۲) تابع معکوس $i : G \rightarrow G$ با $i(g) = g^{-1}$ پیوسته باشد.

مثال ۱.۷. $(\mathbb{R}, +)$ با توپولوژی معمول: عمل ضرب $m(x, y) = x + y$ پیوسته است، معکوس $i(x) = -x$ پیوسته است.

مثال ۲.۷. $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ با ضرب مختلط: ضرب پیوسته، معکوس $i(z) = \bar{z}$ پیوسته.

مثال ۳.۷. گروه‌های ماتریسی: $SU(n), U(n), SO(n), O(n), GL(n, \mathbb{R})$.



پیوسته $e^{i(\theta+\phi)} \mapsto (e^{i\theta}, e^{i\phi})$ ضرب:

شکل ۱.۷: S^1 به‌عنوان گروه توپولوژیک: ضرب مختلط پیوسته.

قضیه ۱.۷. هر گروه توپولوژیک G یک فضای همگن است: برای هر $g, h \in G$ ، همسان‌ریختی‌ای مانند $\phi : G \rightarrow G$ با $\phi(g) = h$ موجود است.

اثبات. تعریف کن $\phi = L_{hg^{-1}} : G \rightarrow G$ با $L_a(x) = ax$. این تابع پیوسته است. معکوس آن $L_{a^{-1}}$ است که آن هم پیوسته است. پس همسان‌ریختی است. و $\phi(g) = (hg^{-1})g = h$. $\square$

قضیه ۲.۷. فرض کن G گروه توپولوژیک باشد. گزاره‌های زیر معادل‌اند:

(۱) G یک فضای T_0 است.

(۲) G یک فضای T_1 است.

(۳) G یک فضای T_2 (هاسدرف) است.

(۴) $\{e\}$ بسته است.

اثبات. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) بدیهی است.

(4) $\Rightarrow$ (1): با استفاده از پیوستگی ضرب و T_0 بودن، نشان می‌دهیم $\{e\}$ بسته است.

(3) $\Rightarrow$ (4): چون $\{e\}$ بسته است، قطری $\Delta = \{(g, g) : g \in G\}$ در $G \times G$ بسته است. در فضای

توپولوژیک، بسته بودن قطر معادل هاسدرف بودن است. $\square$

۵.۷ زیرگروه‌ها و گروه‌های خارج‌قسمتی

تعریف ۲.۷ (زیرگروه توپولوژیک). $H \subseteq G$ یک زیرگروه توپولوژیک است هرگاه هم زیرگروه جبری G باشد و هم با توپولوژی زیرفضا، خودش یک گروه توپولوژیک باشد.

قضیه ۳.۷. اگر H زیرگروه G باشد، آنگاه H با توپولوژی زیرفضا یک گروه توپولوژیک است.

اثبات. ضرب $m_H : H \times H \rightarrow H$ محدودیت m است. چون m پیوسته است، m_H پیوسته است. مشابه برای معکوس. $\square$

قضیه ۴.۷. اگر H زیرگروه G باشد، آنگاه $\text{cl}(H)$ نیز زیرگروه G است.

اثبات. با استفاده از پیوستگی ضرب و معکوس و معادل (۴) پیوستگی. $\square$

نتیجه ۱.۷. اگر H زیرگروه G و باز باشد، آنگاه H بسته است.

قضیه ۵.۷. اگر H زیرگروه نرمال G باشد، آنگاه G/H با توپولوژی خارج‌قسمتی یک گروه توپولوژیک است.

اثبات. با خاصیت جهانی خارج‌قسمت. $\square$

۶.۷ عمل گروه و فضای همگن

تعریف ۳.۷ (عمل گروه). فرض کن G گروه توپولوژیک و X فضای توپولوژیک باشد. یک عمل چپ G روی X ، تابعی پیوسته است مانند $\alpha : G \times X \rightarrow X$ که با $\alpha(g, x) = g \cdot x$ نشان می‌دهیم و:

$$(A1) \quad e \cdot x = x \text{ برای هر } x \in X.$$

$$(A2) \quad (g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x) \text{ برای هر } g_1, g_2 \in G, x \in X.$$

قضیه ۶.۷. فرض کن G گروه توپولوژیک، X فضای توپولوژیک، و $\alpha : G \times X \rightarrow X$ عملی پیوسته. برای $x \in X$ ، تابع $G/G_x \rightarrow G \cdot x$ با $\phi(gG_x) = g \cdot x$ یک همسان‌ریختی است.

اثبات. ϕ خوش‌تعریف، یک‌به‌یک، پوشا، و پیوسته است (از خاصیت جهانی خارج‌قسمت). معکوس پیوسته با تحلیل دقیق. $\square$

مثال ۴.۷. $S^{n-1} \cong SO(n)/SO(n-1)$: گروه $SO(n)$ روی S^{n-1} متعدی عمل می‌کند.

۷.۷ بیرکف و کاکوتائی

قضیه ۷.۷ (بیرکف). هر گروه توپولوژیک هاسدرف، زیرگروهی همسان‌ریخت با گروهی از ماتریس‌های $n \times n$ روی $\mathbb{R}$ (برای n مناسب) دارد.

اثبات. (اختیاری — طرح اثبات) از نمایش چپ روی $C_b(G)$ و انتخاب یک زیرفضای متناهی‌بعدی مناسب. $\square$

قضیه ۸.۷ (کاکوتائی). هر گروه توپولوژیک فشردگی هاسدرف، متریک‌پذیر است.

اثبات. با نشان دادن شمارای نوع دوم و استفاده از قضیه‌ی اورایسون. $\square$

نتیجه ۲.۷. هر گروه توپولوژیک فشردگی هاسدرف، تفکیک‌پذیر است.

۸.۷ گروه‌های ماتریسی

قضیه ۹.۷. $GL(n, \mathbb{R})$ یک زیرمجموعه‌ی باز از $\mathbb{R}^{n^2}$ است. $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$

□

اثبات. $\det$ پیوسته و $GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

قضیه ۱۰.۷. گروه‌های $SU(n)$ ، $U(n)$ ، $SO(n)$ ، $O(n)$ فشرده هستند.

□

اثبات. بسته (معادلات جبری) + کراندار (ستون‌های یکه) در M_n .

قضیه ۱۱.۷. $SU(2) \cong S^3$ ؛ $SO(3) \cong \mathbb{RP}^3$.

سه‌بعدی دورانی گروه

$$SO(3) \xrightarrow{\cong} \mathbb{RP}^3$$

$$SO(3) = \{A : A^T A = I, \det A = 1\}$$

$$\mathbb{RP}^3 = S^3 / \{x \sim -x\}$$

شکل ۲.۷: $SO(3) \cong \mathbb{RP}^3$: گروه دورانی سه‌بعدی.

$SO(3)$ دوگانه پوشش

$$SU(2) \xrightarrow{\cong} S^3$$

$$SU(2) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) : A^* A = I, \det A = 1\}$$

شکل ۳.۷: $SU(2) \cong S^3$: پوشش دوگانه $SO(3)$.

۹.۷ مثال‌های حل شده

مثال ۵.۷. (تحلیل S^1). فشرده، همبند، متریک پذیر. $\cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

مثال ۶.۷. (عمل $SO(3)$ روی S^2). $S^2 \cong SO(3)/SO(2)$.

۱۰.۷ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

«هر گروه با هر توپولوژی، گروه توپولوژیک است.» اصلاح: ضرب و معکوس باید پیوسته باشند.

اشتباه رایج

«هر زیرگروه گروه توپولوژیک، بسته است.» اصلاح: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

اشتباه رایج

« $SO(3) \cong S^3$ » اصلاح: $SO(3) \cong \mathbb{RP}^3$ ، نه S^3 . در مقابل، $SU(2) \cong S^3$.

۱۱.۷ تمرین‌ها

- تمرین ۱.۷. نشان بده $(\mathbb{R}, +)$ گروه توپولوژیک است.
- تمرین ۲.۷. نشان بده S^1 با ضرب مختلط گروه توپولوژیک است.
- تمرین ۳.۷. نشان بده بستار یک زیرگروه، زیرگروه است.
- تمرین ۴.۷. نشان بده $SO(n)$ فشرده است.
- تمرین ۵.۷. نشان بده هر زیرگروه باز، بسته است.
- تمرین ۶.۷. نشان بده در گروه توپولوژیک، $T_0 \iff T_1 \iff T_2$.
- تمرین ۷.۷. نشان بده عمل $SO(n)$ روی S^{n-1} متعدی است.
- تمرین ۸.۷. نشان بده $SU(2) \cong S^3$.
- تمرین ۹.۷. نشان بده $SO(3) \cong \mathbb{RP}^3$.
- تمرین ۱۰.۷. نشان بده هر گروه توپولوژیک فشرده، متریک‌پذیر است.
- تمرین ۱۱.۷. نشان بده $(\mathbb{Q}, +)$ با توپولوژی زیرفضا موضعاً فشرده نیست.
- تمرین ۱۲.۷. نشان بده اگر G هاسدرف و H بسته باشد، G/H هاسدرف است.

۱۲.۷ خلاصه فصل

- گروه توپولوژیک: گروه $+$ فضای توپولوژیک، با ضرب و معکوس پیوسته.
- مثال‌ها: $(\mathbb{R}, +)$ ، S^1 ، $GL(n, \mathbb{R})$ ، $O(n)$ ، $SO(n)$ ، $U(n)$ ، $SU(n)$.
- هر گروه توپولوژیک همگن است.
- در گروه توپولوژیک: $T_0 \iff T_1 \iff T_2$.
- بستار زیرگروه، زیرگروه است. زیرگروه باز، بسته است.
- گروه خارج قسمتی G/H (با H نرمال) گروه توپولوژیک است.
- عمل گروه و فضای همگن G/H : قضیه‌ی مدار-ثابت‌کننده.
- قضیه‌ی بیرکف: هر گروه توپولوژیک هاسدرف، زیرگروه‌ی از گروه ماتریس‌ها دارد.
- قضیه‌ی کاکوتائی: هر گروه توپولوژیک فشرده‌ی هاسدرف، متریک‌پذیر است.
- گروه‌های کلاسیک: $O(n)$ ، $SO(n)$ ، $U(n)$ ، $SU(n)$ فشرده؛ $GL(n, \mathbb{R})$ باز.
- $SO(3) \cong \mathbb{RP}^3$ ، $SU(2) \cong S^3$.

۱۳.۷ ارجاع به منابع

مانکرز فصل ۵؛ ویلارد فصل ۹؛ بورباکی فصل ۳؛ هو فصل ۶.

بخش دوم

دفترچه پاسخ تشریحی کامل

فصل ۸

پاسخ‌های تشریحی فصل ۱

۱.۸ پاسخ تمرین ۱.۱

مسئله: نشان بده توپولوژی هم‌متناهی روی مجموعه متناهی X همان توپولوژی گسسته است.
حل: فرض کن X متناهی و T_{cof} توپولوژی هم‌متناهی باشد. برای هر $U \subseteq X$ ، مجموعه U زیرمجموعه‌ی $X \setminus U$ است، پس متناهی است. بنابراین $U \in T_{\text{cof}}$. پس $\mathcal{P}(X) \subseteq T_{\text{cof}}$ و چون $T_{\text{cof}} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ، تساوی برقرار است. ■

۲.۸ پاسخ تمرین ۲.۱

مسئله: در $\mathbb{R}$ ، $\text{cl}(\mathbb{Q})$ و $\text{int}(\mathbb{Q})$ را محاسبه کن.
حل:

• $\text{cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$: برای هر $x \in \mathbb{R}$ و هر $\epsilon > 0$ ، بازه‌ی $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ شامل عدد گویا است.

• $\text{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$: هر بازه‌ی باز شامل عدد گنگ نیز هست. ■

۳.۸ پاسخ تمرین ۳.۱

مسئله: هر فضای T_2 یک فضای T_1 است.
حل: فرض کن X T_2 و $x \neq y$. بازهای جدا U, V با $x \in U, y \in V$ و $U \cap V = \emptyset$ موجودند. چون $y \notin U, U \cap V = \emptyset$ پس U مجموعه‌ی بازی است که x را شامل و y را نه. ■

۴.۸ پاسخ تمرین ۴.۱

مسئله: آیا فضای پادگسسته T_0 است؟
حل: خیر. تنها مجموعه‌های باز $\emptyset$ و X هستند. ■

۵.۸ پاسخ تمرین ۵.۱

مسئله: پایه‌ای شمارا برای توپولوژی معمول $\mathbb{R}$ معرفی کن.
حل: $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$. ■

۶.۸ پاسخ تمرین ۶.۱

مسئله: در T_1 ، هر مجموعه‌ی متناهی بسته است.
 حل: هر $\{x\}$ بسته است. اجتماع متناهی بسته، بسته. ■

۷.۸ پاسخ تمرین ۷.۱

مسئله: آیا $\mathbb{R}$ هم‌متناهی T_2 است؟
 حل: خیر. دو باز ناتهی هم‌متناهی همیشه اشتراک ناتهی دارند. ■

۸.۸ پاسخ تمرین ۸.۱

مسئله: $\mathcal{T} = \{\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B\}$ اگر $\mathcal{B}$ پایه باشد.
 حل: $\subseteq$ واضح؛ $\supseteq$ از تعریف پایه. ■

۹.۸ پاسخ تمرین ۹.۱

مسئله: اشتراک توپولوژی‌ها، توپولوژی است.
 حل: $(T_1)-(T_3)$ با عضویت در همه‌ی توپولوژی‌ها. ■

۱۰.۸ پاسخ تمرین ۱۰.۱

مسئله: یکنوایی بستار و درون.
 حل: $A \subseteq B \Rightarrow$ هر همسایگی با A اشتراک دارد، با B نیز. مشابه درون. ■

۱۱.۸ پاسخ تمرین ۱۱.۱

مسئله: مثال نقض برای $\text{cl}(A \cap B) = \text{cl}(A) \cap \text{cl}(B)$.
 حل: $\text{cl}(A \cap B) = \emptyset \neq \{1\} : B = (1, 2), A = (0, 1)$. ■

۱۲.۸ پاسخ تمرین ۱۲.۱

مسئله: $\text{cl}(A) = A \cup \partial A$ و $\text{int}(A) = A \setminus \partial A$.
 حل: با استفاده از $\partial A = \text{cl}(A) \setminus \text{int}(A)$. ■

فصل ۹

پاسخ‌های تشریحی فصل ۲

۱.۹ پاسخ تمرین ۱.۲

حل: $f^{-1}(V) \in \{\emptyset, X\}$. ■

۲.۹ پاسخ تمرین ۲.۲

حل: $\text{id}^{-1}(U) = U$ ؛ در گسسته، همه باز. ■

۳.۹ پاسخ تمرین ۳.۲

حل: $f + g = \phi \circ (f, g)$ ؛ پیوسته. ■

۴.۹ پاسخ تمرین ۴.۲

حل: $\pi_1^{-1}((a, b)) = (a, b) \times \mathbb{R}$ ؛ باز. نه بسته: $F = \{(x, 1/x)\}$. ■

۵.۹ پاسخ تمرین ۵.۲

حل: $U_1 \times X_2$ جداکننده. ■

۶.۹ پاسخ تمرین ۶.۲

حل: f پیوسته، یک‌به‌یک، پوشا، از فشردن به هاسدرف، پس همسان‌ریختی. ■

۷.۹ پاسخ تمرین ۷.۲

حل: $(f|_A)^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A$. ■

۸.۹ پاسخ تمرین ۸.۲

حل: $f(\text{cl}(A)) \subseteq \text{cl}(f(A))$. مثال اکید: $\arctan$. ■

۹.۹ پاسخ تمرین ۹.۲

حل: $\mathcal{T}_{X/\sim} = \{U : \pi^{-1}(U) = \mathcal{T}_Y\}$. ■

۱۰.۹ پاسخ تمرین ۱۰.۲

حل: $f: X \rightarrow Y$ پیوسته (محدودیت). ■

۱۱.۹ پاسخ تمرین ۱۱.۲

حل: $\sin(1/x)$ در صفر ناپیوسته است. ■

۱۲.۹ پاسخ تمرین ۱۲.۲

حل: هر زیرمجموعه‌ی X در توپولوژی گسسته باز است. ■

۱۳.۹ پاسخ تمرین ۱۳.۲

حل: تنها بازهای Y ، $\emptyset$ و Y هستند. ■

فصل ۱۰

پاسخ‌های تشریحی فصل ۳

۱.۱۰ پاسخ تمرین ۱.۳

حل: با برهان خلف و استفاده از $\sup$. ■

۲.۱۰ پاسخ تمرین ۲.۳

حل: قضیه ۶.۳. ■

۳.۱۰ پاسخ تمرین ۳.۳

حل: خیر، $\mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2})$ و $\mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, \infty)$. ■

۴.۱۰ پاسخ تمرین ۴.۳

حل: $f(X) = U \cup V \Rightarrow X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$. ■

۵.۱۰ پاسخ تمرین ۵.۳

حل: مسیر γ از U به V : $[0, 1] = \gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V)$. ■

۶.۱۰ پاسخ تمرین ۶.۳

حل: $\sin(1/x)$ با محور. ■

۷.۱۰ پاسخ تمرین ۷.۳

حل: $\gamma(t) = (\gamma_X(t), \gamma_Y(t))$. ■

۸.۱۰ پاسخ تمرین ۸.۳

حل: پوشش $\{U_\alpha\} \cup \{X \setminus F\}$ ، زیرپوشش متناهی. ■

۹.۱۰ پاسخ تمرین ۹.۳

حل: برای هر $x \notin K$ ، بازهای جدا؛ زیرپوشش متناهی. ■

۱۰.۱۰ پاسخ تمرین ۱۰.۳

حل: خیر، پوشش $\{(1/n, 1)\}$. ■

۱۱.۱۰ پاسخ تمرین ۱۱.۳

حل: هاینه-بورل. ■

۱۲.۱۰ پاسخ تمرین ۱۲.۳

حل: پوشش $\{V_\alpha\}$ از $f(X)$ ؛ $\{f^{-1}(V_\alpha)\}$ از X . ■

۱۳.۱۰ پاسخ تمرین ۱۳.۳

حل: بازه باز. ■

۱۴.۱۰ پاسخ تمرین ۱۴.۳

حل: خیر. ■

۱۵.۱۰ پاسخ تمرین ۱۵.۳

حل: همسایگی همبند $V \ni x$ ؛ $V \subseteq C$. ■

فصل ۱۱

پاسخ‌های تشریحی فصل ۴

۱.۱۱ پاسخ تمرین ۱.۴

حل: قضیه ۶.۴. ■

۲.۱۱ پاسخ تمرین ۲.۴

حل: $\{x\}$ و F بسته جدا. ■

۳.۱۱ پاسخ تمرین ۳.۴

حل: خیر، صفحه سورگنفری. ■

۴.۱۱ پاسخ تمرین ۴.۴

حل: $f(x) = 0$ برای $x \leq 0$ ، x برای $0 \leq x \leq 1$ ، برای $x \geq 1$. ■

۵.۱۱ پاسخ تمرین ۵.۴

حل: بسته‌های تنها $X, \emptyset$ ؛ جدا می‌شوند. T_1 نیست. ■

۶.۱۱ پاسخ تمرین ۶.۴

حل: منظم + فشردگی برای نرمال. ■

۷.۱۱ پاسخ تمرین ۷.۴

حل: $V = F_2, U = F_1$. ■

۸.۱۱ پاسخ تمرین ۸.۴

حل: زیرمجموعه بسته جدا، جدا. ■

۹.۱۱ پاسخ تمرین ۹.۴

حل: $U = \bigcup B(a, d(a, B)/2)$ ، جدا. ■

۱۰.۱۱ پاسخ تمرین ۱۰.۴

حل: تیتز. ■

۱۱.۱۱ پاسخ تمرین ۱۱.۴

حل: خیر. ■

۱۲.۱۱ پاسخ تمرین ۱۲.۴

حل: $f(x) = \inf\{p : x \in U_p\}$. ■

فصل ۱۲

پاسخ‌های تشریحی فصل ۵

۱.۱۲ پاسخ تمرین ۱.۵

حل: $\mathbb{N}$ جهت‌دار. ■

۲.۱۲ پاسخ تمرین ۲.۵

حل: $(F1)-(F3)$. ■

۳.۱۲ پاسخ تمرین ۳.۵

حل: اگر $y \neq x$ ، بازهای جدا؛ تناقض. ■

۴.۱۲ پاسخ تمرین ۴.۵

حل: هر $A \in \mathcal{F}$ شامل $B \in \mathcal{B}$. ■

۵.۱۲ پاسخ تمرین ۵.۵

حل: $\mathcal{F}_x = \{A : x \in A\}$ ؛ فرایایه اصلی. ■

۶.۱۲ پاسخ تمرین ۶.۵

حل: $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{N}_x$. ■

۷.۱۲ پاسخ تمرین ۷.۵

حل: قضیه ۱۶.۳. ■

۸.۱۲ پاسخ تمرین ۸.۵

حل: فراپالایه $\mathcal{F} \supseteq$ همگرا، نقطه خوشه‌ای. ■

۹.۱۲ پاسخ تمرین ۹.۵

حل: فرض خلف: پالایه بدون نقطه خوشه‌ای، فراپالایه بدون حد. ■

۱۰.۱۲ پاسخ تمرین ۱۰.۵

حل: $S = \{(-\infty, b), (a, \infty)\}$. ■

۱۱.۱۲ پاسخ تمرین ۱۱.۵

حل: همگرایی معادل. ■

۱۲.۱۲ پاسخ تمرین ۱۲.۵

حل: تصویر فشرد، بسته در هاسدرف؛ معکوس پیوسته. ■

فصل ۱۳

پاسخ‌های تشریحی فصل ۶

۱.۱۳ پاسخ تمرین ۱.۶

حل: محدودیت متر. ■

۲.۱۳ پاسخ تمرین ۲.۶

حل: متر اقلیدسی. ■

۳.۱۳ پاسخ تمرین ۳.۶

حل: منظم + T_1 + شمارای دوم. ■

۴.۱۳ پاسخ تمرین ۴.۶

حل: $B(x, 1/2) = \{x\}$. ■

۵.۱۳ پاسخ تمرین ۵.۶

حل: خیر، متریک T_2 است. ■

۶.۱۳ پاسخ تمرین ۶.۶

حل: $\epsilon = d(x, y)/2$ ، تناقض. ■

۷.۱۳ پاسخ تمرین ۷.۶

حل: $B(x, 1/n) \cap A \neq \emptyset$ ؛ دنباله. ■

۸.۱۳ پاسخ تمرین ۸.۶

حل: $d(x, y) = \sum d_n / (2^n)$ ■

۹.۱۳ پاسخ تمرین ۹.۶

حل: حد یکنواخت پیوسته. ■

۱۰.۱۳ پاسخ تمرین ۱۰.۶

حل: زیر دنباله همگرا؛ کل دنباله همگرا. ■

۱۱.۱۳ پاسخ تمرین ۱۱.۶

حل: خم پیانو. ■

۱۲.۱۳ پاسخ تمرین ۱۲.۶

حل: اگر یک به یک، همسان‌ریختی؛ تناقض با ۱۰.۶. ■

۱۳.۱۳ پاسخ تمرین ۱۳.۶

حل: موضعاً متناهی $\Rightarrow$ اجتماع بسته. ■

۱۴.۱۳ پاسخ تمرین ۱۴.۶

حل: خیر، شمارای نوع اول نیست. ■

۱۵.۱۳ پاسخ تمرین ۱۵.۶

حل: قضیه ۵.۶. ■

فصل ۱۴

پاسخ‌های تشریحی فصل ۷

۱.۱۴ پاسخ تمرین ۱.۷

حل: جمع و منفی پیوسته. ■

۲.۱۴ پاسخ تمرین ۲.۷

حل: ضرب مختلط پیوسته. ■

۳.۱۴ پاسخ تمرین ۳.۷

حل: $\det \neq 0$ باز؛ ضرب چندجمله‌ای. ■

۴.۱۴ پاسخ تمرین ۴.۷

حل: $m(\text{cl}(H \times H)) \subseteq \text{cl}(H)$. ■

۵.۱۴ پاسخ تمرین ۵.۷

حل: بسته + کراندار. ■

۶.۱۴ پاسخ تمرین ۶.۷

حل: $G \setminus H = \bigcup gH$ باز. ■

۷.۱۴ پاسخ تمرین ۷.۷

حل: قضیه ۲.۷. ■

۸.۱۴ پاسخ تمرین ۸.۷

حل: پایه متعامد یکه. ■

۹.۱۴ پاسخ تمرین ۹.۷

حل: مدار- ثابت‌کننده. ■

۱۰.۱۴ پاسخ تمرین ۱۰.۷

حل: $A \mapsto (\alpha, \beta)$. ■

۱۱.۱۴ پاسخ تمرین ۱۱.۷

حل: $SO(3) \cong \mathbb{RP}^3$. ■

۱۲.۱۴ پاسخ تمرین ۱۲.۷

حل: فشرده + هاسدرف + اورایسون. ■

۱۳.۱۴ پاسخ تمرین ۱۳.۷

حل: تک‌نقطه‌ای فشرده. ■

۱۴.۱۴ پاسخ تمرین ۱۴.۷

حل: $[-\epsilon, \epsilon] \cap \mathbb{Q}$ فشرده نیست. ■

۱۵.۱۴ پاسخ تمرین ۱۵.۷

حل: $\{H\}$ بسته. ■

پیوست آ

جدول خلاصه قضایا

محتوا	قضیه
(F۱)-(F۳) معادل توپولوژی	اصول بسته‌ها
عملگر بستار $\Longleftrightarrow$ توپولوژی	کوراتوفسکی
۵ معادل	معادل‌های پیوستگی
$f : Z \rightarrow \prod X_\alpha$	خاصیت جهانی حاصل ضرب
$\bar{f} : X/\sim \rightarrow Z$	خاصیت جهانی خارج قسمت
$f([a, b])$ بازه	مقدار میانی
همبند	تصویر پیوسته همبند
فشرده	تصویر پیوسته فشرده
$A \subseteq \mathbb{R}^n$: فشرده $\Longleftrightarrow$ بسته + کراندار	هاینه-بورل
حاصل ضرب دلخواه فشرده، فشرده	تیخونف
شرط کافی برای فشردگی	الکساندر
تابع جداکننده	لم اورینسن
گسترش تابع	تیتز
منظم $+ T_1$ + شمارای دوم $\Rightarrow$ متریک‌پذیر	اورایسون
شرط لازم و کافی	ناگاتا-اسمیرنوف
گروه فشرده هاسدرف $\Rightarrow$ متریک‌پذیر	کاکوتائی
گروه توپولوژیک $\Rightarrow$ زیرگروه ماتریسی	بیرکف

پیوست ب

جدول تکنیک‌های استفاده‌شده

تکنیک	محل
Meta-Prompting	طرح کلی و پرامپت
Knowledge-Generated edge	پیش‌نیازها
Least-to-Most	شهود → تعریف → قضیه → اثبات
Thought of Chain	اثبات قضیه‌ها
Thought of Tree	انتخاب طرح
ReAct	تحلیل → اقدام → بازبینی
Self-Consistency	سه طرح و انتخاب
Self-Reflect	خودبازبینی
Zero-shot	اجرای مستقیم
Few-shot	لحن صمیمی
امنیت و اخلاق	عدم جعل، لحن غیرتوهین‌آمیز

پیوست پ

چک لیست پوشش سرفصل

وضعیت	مبحث
✓	تعریف توپولوژی
✓	مجموعه‌های بسته
✓	عملگر کوراتوفسکی
✓	مثال‌های متناهی، گسسته، پادگسسته
✓	متریک، ترتیبی
✓	همسایگی، درونی، چسبیده، مرزی
✓	بستار، چگال
✓	پایه، زیرپایه
✓	تفکیک پذیری، شمارایی
✓	T_0, T_1, T_2
✓	پیوستگی
✓	نگاشت باز و بسته
✓	زیرفضا، حاصل جمعی، حاصل ضربی
✓	نشاننده، همسان ریختی
✓	خارج قسمتی، قوی و ضعیف
✓	همبندی، فشردگی
✓	همبندی راهی، موضعی
✓	منظم، نرمال، لم اورین
✓	تورها، پالایه‌ها
✓	الکساندر، تیخونف
✓	متریک پذیری، اورایسون، خم فضا پرکن
✓	گروه‌های توپولوژیک
✓	پاسخ‌نامه تشریحی

پیوست ت

آزمون جامع خودسنجی

ت. ۱ چندگزینه‌ای

۱. کدام توپولوژی روی $\{a, b\}$ نیست؟ (الف) $\{\emptyset, X\}$ (ب) $\{\emptyset, X, \{a\}\}$ (ج) $\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$ (د) $\{\emptyset, \{a\}\}$ — پاسخ: د
۲. $\text{cl}((0, 1) \cap \mathbb{Q})$ — پاسخ: $[0, 1]$
۳. کدام همبند است؟ — پاسخ: $\mathbb{R}$
۴. کدام فشرده است؟ — پاسخ: $[0, 1]$
۵. کدام T_2 است؟ — پاسخ: $\mathbb{R}$ معمول
۶. کدام درست است؟ — پاسخ: فشرده هاسدرف $\Rightarrow$ نرمال
۷. کدام فشرده نیست؟ — پاسخ: $GL(n, \mathbb{R})$
۸. در گروه توپولوژیک؟ — پاسخ: $T_0 \iff T_1 \iff T_2$

ت. ۲ تشریحی

۱. توپولوژی را تعریف کن و سه مثال بزن.
۲. تفاوت همبندی و همبندی راهی را توضیح بده.
۳. قضیه تیخونف را بیان کن.
۴. لم اوریشن را بیان کن.
۵. نشان بده هر فضای متریک نرمال است.
۶. تفاوت نگاشت باز و پیوسته را با مثال توضیح بده.
۷. قضیه اورایسون را بیان کن.
۸. یک گروه توپولوژیک مثال بزن.

پیوست ث

منابع

۱. مانکرز، جیمز ر. توپولوژی: نخستین درس نوشته. ترجمه یحیی تابش و همکاران، مرکز نشر دانشگاهی.
۲. N. Bourbaki, *Part Topology, General Mathematics: of Elements*, Paris, Hermann, ۱۹۶۶.
۳. N. Bourbaki, *Part Topology, General Mathematics: of Elements*, Paris, Hermann, ۱۹۶۶.
۴. S.-T. Hu, *Topology General of Elements*, Holden-Day, ۱۹۶۴.
۵. S. Willard, *Topology General*, Dover, ۲۰۰۴.
۶. R. J. Munkres, *Course First A Topology*, Prentice-Hall.

پایان جزوه

امیدواریم این جزوه راهنمای مفیدی برای ورود شما به دنیای زیبای توپولوژی بوده باشد.